فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۳ (پاییز ۱۳۸۸) صص. ۵۷ تا ۶۶

ماتریس نمایی e^{At} در فیزیک

طاهره زارع ـ جواد بهبودیان

چکیده

در این مقاله پس از معرفی تابع نمایی، به تعریف ماتریس نمایی e^{At} که در آن A یک ماتریس $n \times n$ است، می‌پردازیم. در ادامه ویژگی‌های مهم آن را بررسی می‌کنیم و به اختصار چند روش محاسبهٔ ماتریس نمایی e^{At} را ارائه می‌دهیم. در پایان کاربردهای ماتریس نمایی e^{At} در فیزیک را مطرح می‌نمائیم.

۱ مقدمه

تعریف ۱.۱. تابع نمایی

راه‌های گوناگونی برای تعریف تابع نمایی $\exp(x)$ که در آن x عددی حقیقی است، وجود دارد.

یک روش e^x را به صورت سری توانی

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (1)$$

تعریف می‌کند که برای تمام مقادیر x همگرا است.

حال اگر قرار دهیم $x = 1$، $\exp(1)$ یا به طور خلاصه e به دست می‌آید که به «عدد نپر»[1] معروف است. e عددی اصم است و مقدار تقریبی آن تا سه رقم اعشار برابر است با ۲/۷۱۸. ثابت شده است که: $e = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$.

روش دیگری که توسط نپر در قرن هفدهم مطرح شد، این است که ابتدا لگاریتم طبیعی را به‌صورت انتگرال $y > 0$، $\log y = \int_1^y \frac{1}{x}.dx$ بیان و سپس تابع نمایی را وارون این تابع تعریف

1) Napier

می‌کند، پس معنی $y = e^x$ عبارت است از $x = \log_e y$. لازم به ذکر است که لگاریتم‌هایی با مبنای طبیعی e را «لگاریتم طبیعی» یا «لگاریتم ـ نپری» می‌نامند و آن را به صورت $\log_e$ یا به طور خلاصه $\ln$ نمایش می‌دهند. به طور کلی تمام روش‌های تعریف تابع نمایی معادل هستند، بدین معنی که همگی تابعی را تولید می‌کنند که دارای خواص بنیادی یکسان هستند.

تعریف ۲.۱. ماتریس نمایی e^{At}

یکی از راه‌های طبیعی تعریف ماتریس نمایی e^{At} استفاده از تابع نمایی e^x است. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ و I ماتریس همانی و t یک عدد حقیقی باشد، اگر در رابطهٔ (۱) به جای x از At و به جای ۱ از I استفاده کنیم، این مجموع همگرا به یک ماتریس $n \times n$ می‌شود که آن را با e^{At} نمایش می‌دهیم:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^۲}{۲!} + \frac{(At)^۳}{۳!} + \cdots \Longrightarrow e^{At} = I + \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

لازم به ذکر است که، چون هر درایه ماتریس e^{At} به‌صورت $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ می‌باشد و بنابراین سری ماتریس فوق نیز همگراست.

۲ ویژگی‌های ماتریس نمایی e^{At}

۱.۲. فرض کنیم A و B ماتریس‌های مختلط مقدار $n \times n$، a ، b و t، اعداد مختلط دلخواه باشند و همچنین ماتریس همانی I و ماتریس صفر را در نظر بگیریم. ماتریس نمایی در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

۱. $e^{۰} = I$

۲. $e^{Aa}.e^{Ab} = e^{A(a+b)}$

۳. $(e^{At})(e^{-At}) = I$

۴. $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$

۵. $\det(e^A) = e^{tr(A)}$

که در آن $tr(A)$، اثر A [۱] مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A است.

٦. اگر A^T، ترانهاده A باشد آن‌گاه $\exp(A^T) = (\exp A)^T$

۷. اگر $AB = BA$ آن‌گاه $e^A.e^B = e^{A+B}$

۸. اگر A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه $e^{ABA^{-۱}} = Ae^B A^{-۱}$.

۹. $(e^A)^{-۱} = e^{-A}$

1) trace

مثال ۲.۲: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، به آسانی می‌توان نشان داد که برای $n = 1, 2, \ldots$، $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$ است. بنابراین داریم:

$$I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{1!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{(-1)}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \end{bmatrix}.$$

با استفاده از خاصیت تابع نمایی نتیجه می‌گیریم: $e^A = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$.

مشاهده می‌شود که برای ماتریس قطری A، e^A قطری است و درایه‌های روی قطر اصلی آن برابرند با نماهای روی قطر اصلی A. اگر B مشابه A باشد (که در این صورت می‌نویسیم $A \sim B$) یعنی اگر ماتریس معکوس‌پذیر P وجود داشته باشد به طوری که $B = P^{-1}AP$. داریم: $B^n = P^{-1}A^nP$ برای هر $n = 1, 2, \ldots$. بنابراین

$$I + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{n!}B^n = P^{-1}\left(I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n\right)P$$

پس $e^B = P^{-1}e^AP$. در مورد مثال قبل داریم: $e^B = P^{-1}\begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}P$.

بنابراین اگر A و B مربع باشند و $A \sim B$ آن‌گاه $e^A \sim e^B$. به علاوه اگر $B = P^{-1}AP$ آن‌گاه $e^B = P^{-1}e^AP$.

۳.۲. برای هرماتریس A , e^{At} وارون‌پذیر است.

برای اثبات کافی است به مقادیر ویژه آن توجه کنیم. اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه $e^{\lambda t}$ مقدار ویژهٔ متناظر آن برای e^{At} است و عددی مانند $e^{\lambda t}$ هرگز برابر صفر نیست. بنابراین $\det e^{At} \neq 0$ یعنی e^{At} وارون‌پذیر است و طبق ویژگی ۳ وارون e^{At}، ماتریس e^{-At} است.

نکته ۴.۲. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، در مورد ماتریس نمایی e^{At} داریم:

۱. $$\det(e^{At})^{-1} = \frac{1}{\det e^{At}}$$

اگر $(e^{At})^T$ ترانهاده ماتریس e^{At} باشد آنگاه

۲. $$\det(e^{At})^T = \det e^{At}$$

نکته ۵.۲. اگر A و B دو ماتریس مربع باشند، و $e^{At} \sim e^{Bt}$ آن‌گاه داریم:

$$\det e^{At} = \det e^{Bt}$$

نکته ۶.۲. اگر A یک ماتریس مربع بالا مثلثی از مرتبهٔ n و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن

صفر باشد، آنگاه $A^n = ۰$. (چنین ماتریسی را یک ماتریس «پوچ توان» می‌نامند). در این صورت داریم:

$$e^A = I_n + \frac{۱}{۱!}A + \frac{۱}{۲!}A^۲ + \cdots + \frac{۱}{(n-۱)!}A^{n-۱}$$

قضیهٔ ۷.۲. اگر $B = B(t)$ یک ماتریس $n \times n$ از توابع مشتق‌پذیر باشد آنگاه $(e^B)' = B'e^B = e^B.B'$ اگر و تنها اگر $BB' = B'B$.

اثبات: [2]

لوئی کانتور[1] با ارائهٔ مثالی [6] نشان داد که در حالت کلی قاعدهٔ زنجیری برای توابعی که شامل توابع نمایی ماتریسی‌اند، برقرار نیست. تابع ماتریسی $A(s)$ را می‌سازیم که:

$$\frac{d}{dt}\exp\left(\int_۰^t A(s).ds\right) \neq \left[\exp\left(\int_۰^t A(s).ds\right)\right].A(t), \qquad (۲)$$

$$\frac{d}{dt}\exp\left(\int_۰^t A(s).ds\right) \neq A(t).\left[\exp\left(\int_۰^t A(s).ds\right)\right]. \qquad (۳)$$

برای مثال تابع ماتریسی $A(t) = \begin{bmatrix} t & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $-\infty < t < +\infty$ در رابطه‌های (۲) و (۳) صدق می‌کند.

۳. روش‌های به دست آوردن ماتریس نمایی e^{At}

قضیهٔ ۱.۳. فرض کنید A و B ماتریس‌های ثابت $n \times n$ و $n \times m$ باشند، در این صورت مسألهٔ مقدار اولیهٔ $B = y(۰)$ و $y'(t) = Ay(t)$ جواب ماتریسی $n \times m$ منحصر به فرد در بازهٔ $-\infty < t < \infty$ دارد. جواب مذکور با فرمول $y(t) = e^{At}.B$ داده می‌شود. در حالت کلی‌تر، جواب مسألهٔ مقدار اولیه $y(a) = B$ و $y'(t) = Ay(t)$ عبارت است از:

$$y(t) = e^{A(t-a)}.B$$

اثبات: [۱]

قضیهٔ ۲.۳. اگر A یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه $\lambda_۱$، $\cdots$، λ_n باشد، آن‌گاه $e^{At} = \sum_{k=۱}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A)$. که $L_k(A)$ یک چندجمله‌ای لاگرانژ درجه $n - ۱$ نسبت به A است که به وسیلهٔ فرمول ذیل داده می‌شود:

به ازای $k = ۱, ۲, ..., n$، $L_k(A) = \prod_{\substack{j = ۱ \\ j \neq k}}^{n} \frac{A-\lambda_j i}{\lambda_k - \lambda_j}$.

اثبات: [۱]

1) Liu. Contor

قضیهٔ ۳.۳. اگر ماتریس A ،$n \times n$ با مقادیر ویژه λ_1، $\cdots$، λ_n بتواند قطری شود، آنگاه $e^{At} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A)$. ($L_k(A)$ در قضیهٔ قبل معرفی شده است) در نتیجه

آ) برای هر عدد صحیح $r \geq 0$، $A^r = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^r L_k(A)$.

ب) برای هر چندجمله‌ای $p(\lambda)$، $p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(\lambda_k) L_k(A)$.

اثبات: [1]

در صورتی که ماتریس A دارای مقادیر ویژهٔ تکراری باشد قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۴.۳. اگر A ماتریس $n \times n$ باشد که تمام مقادیر ویژهٔ آن برابر با λ هستند، آنگاه

$$e^{At} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k$$

اثبات: [1]

قضیهٔ ۵.۳. قضیه کیلی هامیلتون برای ماتریس‌ها

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و $c(x)$ چندجمله‌ای مشخصه آن باشد، در این صورت $c(A) = 0$ یا به عبارت دیگر A در معادله مشخصه‌اش صدق می‌کند.

روش پوتزر[1] [1] برای محاسبهٔ ماتریس‌های e^{At}، در مورد تمام ماتریس‌های مربع A اعتبار دارد. این روش بر اساس قضیه کیلی هامیلتون است.

قضیهٔ ۶.۳. فرض کنیم λ_1، $\cdots$، λ_n مقادیر ویژه ماتریس A هستند. دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها برحسب A رابا ضابطهٔ ذیل تعریف می کنیم:

فرض کنیم $p_0(A) = I$ به ازای $k = 1, 2, \ldots, n$، و $p_k(A) = \prod_{m=1}^{k} (A - \lambda_m I)$. در این صورت

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) . p_k(A)$$

که در آن ضرائب اسکالری $r_1(t)$، $\cdots$، $r_n(t)$ به طریق بازگشتی از دستگاه مثلثی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی ذیل تعیین می‌شوند:

$$r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t), \quad r_1(0) = 1$$

$$r_{k+1}'(t) = \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), \quad r_{k+1}(0) = 0$$

برای $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

روشی که توسط ادوارت و فولمر[2] [4] برای محاسبهٔ ماتریس نمایی e^{At} ارائه شده است، زمانی کارآیی دارد که A مشابه یک ماتریس قطری باشد و اهمیت این روش، در سادگی تدریس آن است،

1) T. putzer 2) Fulmer, Edvart

ولی از آنجایی که برای استفاده از این روش نیاز به محاسبهٔ $n-1$ توان از ماتریس A داریم، زمانی که A بزرگ باشد، عملی نیست. این روش، وقتی که ماتریس A مقادیر ویژه تکراری داشته باشد اساسی به نظر می‌رسد. [4]

قضیهٔ ۷.۳. درایه‌های ماتریس e^{At} در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n ام، $c(D)y=0$ صدق می‌کنند که در آن $c(x)=\det(xI-A)$ چندجمله‌ای مشخصه A است و $D=\dfrac{d}{dt}$.

این حکم نتیجهٔ قضیه کیلی هامیلتون است و در حقیقت برای $k=1,2,\ldots$ داریم $\dfrac{d^k}{dt^k}(e^{At})=A^ke^{At}$ و درنتیجه: $\dfrac{d^k}{dt^k}(e^{At})_{t=0}=A^k$ و $e^{At}\mid_{t=0}=I$ برای $k=1,2,\ldots$.

بنابراین e^{At} جواب یگانه مسأله مقدار اولیه مرتبه n ام، $c(D)G(t)=0$ است که

$$G(0)=I, G'(0)=A, ..., G^{(n-1)}(0)=A^{n-1}.$$

برای شرح این روش فرض می‌کنیم که A، n مقدار ویژه متفاوت λ_1، $\cdots$، λ_n دارد.

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $c(D)G(t)=0$ به‌صورت

$$G(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$$

می‌باشد که c_kها، $k=1,2,\ldots$، ماتریس‌های $n\times n$ ثابت هستند، n شرط اولیهٔ زیر برای تشکیل یک دستگاه n معادلهٔ خطی برای n ماتریس مجهول c_k وجود دارد

$$\begin{aligned}
&I=c_1+c_2+\cdots+c_n\\
&A=\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n\\
&A^2=\lambda_1^2c_1+\lambda_2^2c_2+\cdots+\lambda_n^2c_n\\
&\vdots\\
&A^{n-1}=\lambda_1^{n-1}c_1+\lambda_2^{n-1}c_2+\cdots+\lambda_n^{n-1}c_n
\end{aligned}$$

یک راه‌حل این دستگاه معادلات این است که ماتریس c_k را توسط چندجمله‌ای‌هایی از درجه $n-1$ در ماتریس A به دست آوریم.

حال، فرض کنیم A، k مقدار ویژه متفاوت λ_1، λ_2، $\cdots$ و λ_k با تکرارهای به ترتیب s_1، s_2، $\cdots$ و s_k دارد. در این حالت جواب عمومی معادله $c(D)G(t)=0$ به‌صورت

$$(c_{11}+c_{12}+\cdots+t^{s_1-1}c_{1s_1})e^{\lambda_1 t}+\cdots+(c_{k_1}+tc_{k_2}+\cdots+t^{s_k-1}c_{ks_k})e^{\lambda_k t}$$

می‌باشد و به همین ترتیب اثبات ادامه پیدا می‌کند.

روشی که توسط لئونارد[1] [5] برای محاسبهٔ ماتریس نمایی e^{At} عنوان شده، دو قضیه را مطرح می‌کند، که قضیهٔ اول وجود یک جواب خصوصی برای مسألهٔ مقدار اولیهٔ معادلات دیفرانسیل

1) Leonard

ماتریسی را تضمین می‌کند. قضیهٔ دوم، روشی برای محاسبهٔ ماتریس نمایی e^{At}، با استفاده از جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل اسکالری مرتبهٔ n ارائه می‌دهد که در این روش مقادیر ویژهٔ ماتریس A تکراری می‌باشند.

قضیهٔ ۸.۳. اگر A یک ماتریس $n \times n$ ثابت با چندجمله‌ای مشخصه $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$ باشد، آنگاه $\varphi(t) = e^{At}$ جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی مرتبه n،

$$\varphi^{(n)} + c_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \cdots + c_1\varphi' + c_0\varphi = 0 \qquad (۴)$$

است ، که در شرایط اولیه

$$\varphi(0) = I, \varphi'(0) = A, \varphi''(0) = A^2, ..., \varphi^{(n-1)}(0) = A^{n-1} \qquad (۵)$$

صدق می‌کند.

برای اثبات این قضیه فرض می‌کنیم φ_1 و φ_2 جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام (۴) باشند که در شرایط اولیه (۵) صدق می‌کنند. قرار می‌دهیم $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$، در این صورت φ با شرایط اولیه $\varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$ در رابطهٔ (۴) صدق می‌کند. حال از قضیهٔ کیلی هامیلتون استفاده و اثبات قضیه را کامل می‌کنیم.

قضیهٔ ۹.۳. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ ثابت با چندجمله‌ای مشخصه $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$ باشد. در این صورت

$$e^{At} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \cdots + x_n(t)A^{n-1}$$

که $x_k(t)$، $1 \leq k \leq n$، جواب‌های معادله دیفرانسیل اسکالر مرتبه n،
$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1x' + c_0x = 0$، هستند که در شرایط اولیهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{array}{llll}
x_1(0) = 1 & x_2(0) = 0 & & x_n(0) = 0 \\
x_1'(0) = 0 & x_2'(0) = 1 & & x_n'(0) = 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
x_1^{(n-1)}(0) = 0 & x_2^{(n-1)}(0) = 0 & & x_n^{(n-1)}(0) = 0
\end{array}$$

برای اثبات این قضیه از چندجمله‌ای مشخصه $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ استفاده کرده و تابع φ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\varphi(t) = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \cdots + x_n(t)A^{n-1}$$

که‌در آن $x_k(t)$ها برای $1 \leq k \leq n$، جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل اسکالری مرتبه n ام

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1x' + c_0x = 0$$

می‌باشند. با استفاده از قضیهٔ قبل اثبات را ادامه می‌دهیم.

تعریف ۳.۱۰. یک ماتریس $n \times n$ از توابع که در آن هر سطر بعد از سطر اول، از مشتقگیری درایه‌های سطر قبلی حاصل می‌گردد،یک ماتریس «رانسکین [1]» نامیده می‌شود که به افتخار ریاضیدان لهستانی ج.م.هـ . رانسکی (۱۷۷۸–۱۸۵۳) نامگذاری شده است. لازم به ذکر است که این ماتریس در موارد مورد نظر ما معکوس‌پذیر است [1].

ماتریس رانسکین $w[y;t]$ برای n تابع مختلط مقدار هموار y_1، $\cdots$ و y_n از متغیرهای حقیقی ماتریس $n \times n$ زیر است. (تابع هموار تابعی است که دارای مشتق پیوسته باشد.)

$$w[y;t] = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

۱۱.۳. هریس [2] [9] ، روشی را برای محاسبهٔ ماتریس نمایی e^{At} به کمک ماتریس رانسکین ارائه داده است، که بر اساس قضیه کیلی هامیلتون می‌باشد. در حقیقت e^{At} جواب ماتریسی مسألهٔ مقدار اولیهٔ $\frac{dX}{dt} = AX$ ، $-\infty < t < +\infty$ ، $X(0) = I$ می‌باشد، که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است. وی با توجه به این نکته که ماتریس رانسکین معکوس‌پذیر است، دو نمایش برای ماتریس نمایی e^{At} عنوان می‌کند.

در این روش، از نرم‌افزار متمتیکا استفاده می‌کنیم و با بررسی یک مثال به این نکته پی می‌بریم که تغییر کوچکی در درایه‌های یک ماتریس $n \times n$ (مثلاً اگر هر درایه را به مقدار ۰/۰۰۰۱ کاهش دهیم) منجر به تغییرچشمگیری در درایه‌های ماتریس نمایی آن می‌شود.

۴. کاربرد ماتریس نمایی e^{At} در فیزیک

در این بخش به معنای فیزیکی معادله

$$\frac{du}{dt} = Au \qquad (6)$$

به ازای $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ می‌پردازیم و رابطهٔ آن را با ماتریس نمایی e^{At} بررسی می‌کنیم [1].

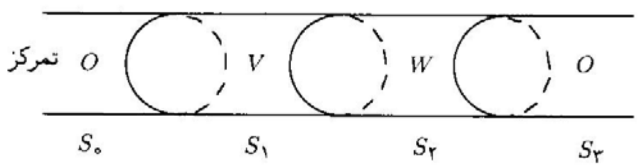
معادلهٔ دیفرانسیل یک فرایند «پخش» را توصیف می‌کند، که با تقسیم یک لوله به طول بی‌نهایت به چهار قسمت دیده می‌شود. دو قسمت وسط متناهی‌اند، و دو قسمت انتهایی نیمه نامتناهی‌اند. (شکل (۱)) در زمان $t = 0$، قطعات متناهی شامل غلظت‌های V_0 و W_0 از یک محلول شیمیایی است. در همین زمان برای تمام زمان‌ها، غلظت در دو قطعه نیمه نامتناهی صفر با

1) Wronskin 2) Harris

حجم نامتناهی است. این تصور درستی را از متوسط غلظت در این قطعات نامتناهی ـ حتی بعد از این که مادهٔ شیمیایی شروع به پخش کرده باشد ـ می‌دهد، پخش در زمان $t = 0$ شروع می‌شود و از قانون زیر پیروی می‌کند.

«در هر زمان t، میزان پخش بین دو قطعهٔ مجاور برابر تفاضل غلظت‌ها است.»

تصور می‌کنیم که در میان هر قطعه، غلظت یکنواخت باقی می‌ماند. این فرآیند برحسب زمان پیوسته است، اما از نظر فضا گسسته است؛ تنها مجهول‌ها $V(t)$ و $W(t)$ در دو قطعهٔ داخلی S_1 و S_2 است.



شکل ۱: یک الگوی پخش

غلظت V به دو طریق تعبیر می‌شود، با پخش به توی قطعه چپ S_0 و با پخش به تو یا خارج S_2. بنابراین نرخ خالص تغییر (سرعت تغیر غلظت) به صورت زیر است:

$$\frac{dV}{dt} = (W - V) + (0 - V) = -2V + W$$

چون غلظت در S_0 همواره صفر است. همچنین:

$$\frac{dW}{dt} = (0 - W) + (V - W) = V - 2W$$

بنابراین، این دستگاه دقیقاً به مثال $\frac{du}{dt} = Au$ در معادلهٔ (۶) برازش دارد.

$$u = \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}, \quad \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} -2V + W \\ V - 2W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u$$

ابتدا مقادیر و بردارهای ویژه را به دست می‌آوریم:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژهٔ $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = -1$ بیان کنندهٔ چگونگی جواب هستند . آنها میزان استهلاک غلظت رانشان می‌دهند و $\lambda_1 = -3$ مهم‌تر است، زیرا تنها یک مجموعهٔ استثنایی از شرایط اولیه می‌تواند به «استهلاک فوق‌العاده» با میزان e^{-3t} منجر می‌شود. در واقع، آن شرایط باید از بردار ویژهٔ $(1, -1)$ آمده باشند. اگر آزمایش فقط برای غلظت‌های نامنفی صادق باشد، استهلاک فوق‌العاده غیرممکن است و حداقل مقداری که سرعت تغییر غلظت می‌تواند داشته باشد، باید برابر e^{-t} باشد. جوابی که با این نرخ مستهلک می‌شوند، متناظر با بردار ویژهٔ $(1, 1)$ است، و بنابراین دو غلظت در $t \longrightarrow \infty$ برابر می‌شوند.

مراجع

[۱] گیلبرت استرانگ، جبر خطی و کاربردهای آن، مترجمین: حجت رضایی پژند، ابوالقاسم بزرگ نیا، مشهد دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۸۲.

[2] T. M. Apostol (1997), Linear Algebra-A First Course, with Application to Differential Equations, Wiley, New York.

[3] J. J. Duistemaat and J. A. C. Kolk, Lie Groups, springer, 2000.

[4] S. N. Elaydi and W. A. Harris, JR. (1998), on the computation of A^N, SIAM Rev., 40, pp. 965-976.

[5] E. P. Fulmer (1975), Computation of the matrix exponential, Amer. Math. Monthly, 82. pp. 156-156.

[6] L. E. Leonard (1996). The matrix exponential, SIAM Rev., 38, pp. 507-512.

[7] J. H. Liu, A remark on the chain rule for exponential matrix functions, College. Math. J., 34 (2003), 141-143.

[8] C. Moler and C. Vanloan (1978), Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, SIAM Rev., 20, pp. 801-836.

[9] J. H. Wilkinson and C. Reinsch (1971), Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation 2, Springer-Verlag, Berlin.

[10] A. William. Harris (2001), Matrix Eponentails-Another Approach, SIAM (Rev., 43. No. 4, pp. 694-706.

[11] A. D. Ziebur (1970), On determining the structure of A by analyzing e^{At}, SIAM Rev., 12, pp. 78-102.

طاهرهٔ زارع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، باشگاه پژوهشگران جوان Tahere_zare@yahoo.com

جواد بهبودیان، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، گروه کارشناسی ارشد ریاضی Behboodian@susc.ac.ir