فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۹۹ تا ۱۱۷

اثبات قضیه در منطق‌های زمانی به کمک رایانه و کاربر

سید ابوالقاسم کلانتری ـ مجتبی آقایی

۱. مقدمه

هدف این مقالهٔ توصیفی، آشناکردن علاقه‌مندان با نمونه‌هایی از تلاش‌هایی است که در جهت استفاده از سیستم‌های منطقی برای ماشینی‌سازی اثبات در دست انجام است. در [۷] به دنبال الگوریتمی برای اثبات رشته‌های منطقی به کمک رایانه، اثباتگر قضیه‌ای[1] ارائه شده و این ایده در [۲] با ارائهٔ اثبات با نقطه‌گذاری و سپس تعمیم آن به سیستم‌های منطق موجهات زمانی در[۵] دنبال شده است. به دلیل این که مطالعهٔ سیستم‌های مذکور برای منطق موجهات، سیستم‌های متناظر برای منطق گزاره‌ای را نیز پوشش می‌دهد، این مقاله بنابر مرجع [۵] اهداف زیر را دنبال می‌کند:

۱) الگوریتمی که با استفاده از ایدهٔ کاربر و ادامهٔ روند اثبات توسط رایانه اثباتی در سیستمی گنسنی[2] ارائه دهد.

۲) الگوریتمی که با استفاده از ایده کاربر و ادامه اثبات با رایانه اثباتی متنی در سیستم استنتاج طبیعی ارائه دهد.

به منظور رسیدن به این اهداف ابتدا با معرفی سیستم گنسنی برای منطق موجه $S۴.۳$، تکنیک‌های اثبات به روش نقطه‌گذاری و روش نقطه و پرتاب[3] در این منطق را ارائه می‌دهیم [۲]. در انتها با استفاده از زبان شبه طبیعی[4]، روش تولید چنین اثبات‌های متنی با تلفیق روش نقطه‌گذاری در متن‌ها به کمک رایانه و کاربر ارائه می‌شود [۳].

1) Theorem prover 2) Context Gentzen style system 3) Point and Shoot
4) Pseudo-natural language

۲. اصول منطق‌های موجه و زمانی

زبان منطق‌های موجه، توسعه یافتهٔ زبان منطق گزاره‌ای است که با یک یا چند عملگر گزاره‌ای به‌نام عملگرهای موجه ساخته می‌شوند. این منطق‌ها همگی دارای اصلی پایه به‌نام K می‌باشند. همچنین دارای دو عملگر گزاره‌ای «$\Box$» و «$\Diamond$» به‌نام‌های «مربع» و «لوزی» هستند که مثلاً می‌توانند به‌صورت «لزوماً[1]» و «ممکن است[2]» تعبیر شوند. این دو عملگر در منطق‌های زمانی به‌معنی «همیشه» و «بالاخره» می‌باشند. بنابراین اگر A یک گزاره باشد در این صورت $\Box A$ یعنی «A همیشه درست است» و $\Diamond A$ یعنی «A بالاخره درست خواهد بود».
این منطق‌ها همچنین همگی قاعدهٔ لزوم[3] $\Box I$ ($\vdash A \implies \vdash \Box A$) و قاعدهٔ قیاس استثنایی[4] $(\mathrm{MP})(\frac{A \to B \quad A}{B})$ را به‌عنوان قواعد استنتاج دارا می‌باشند. از مهمترین این منطق‌ها منطق $KT۴$ به نام $S۴$ و منطق $KT۴.۳$ به نام $S۴.۳$ است. در اینجا اعداد و حروف معرف اصول زیرند:

$$
\begin{array}{ll}
:K & \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \\
:T & \Box A \to A \\
:۴ & \Box A \to \Box\Box A \\
:۳ & \Box(\Box A \to B) \lor \Box(\Box B \to A)
\end{array}
$$

۳. اثبات به روش نقطه‌گذاری

این روش را روی یک سیستم گِنسنی که یکی از مهمترین سیستم‌های منطقی است در منطق زمانی $S۴.۳$ پیاده می‌کنیم. اساس کار در این قسمت سیستم گنسنی مرجع [۵] است. در زیر Γ مجموعه‌هایی مکرراز فرمول‌ها در زبان منطق موجهات است، یعنی تکرار فرمول در آن مهم است و $\Gamma \vdash A$ را رشته گوییم و می‌توانیم آنرا به معنای $\bigwedge \Gamma \to A$ در نظر بگیریم. در این روش ترم‌ها در رشته‌های هر قاعده به ترم‌های کوچکتر تجزیه می‌شوند. عبارتی که باید تجزیه شود در رشتهٔ نتیجهٔ قاعده قرار دارد و ممکن است در نتیجهٔ رشته یا در فرضیات آن باشد. همچنین زیرترم‌های حاصل از تجزیهٔ آن ترم دوباره در فرضیات مقدم ظاهر می‌شوند. برای روشن شدن موضوع آن را روی قاعدهٔ $\wedge R$ به کار می‌بریم. این قاعده به صورت زیر است:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود پس از تجزیهٔ $A \wedge B$، قسمت چپ فرمول یعنی A در رشتهٔ اول فرض، یعنی در $\Gamma \vdash A$، و قسمت راست فرمول یعنی B در رشتهٔ دوم فرض، یعنی در $\Gamma \vdash B$ قرار می‌گیرد. حال روش نقطه‌گذاری را روی این قاعده به این صورت به کار می‌گیریم:

1) Necessarily 2) Possibly 3) Necessitation 4) Modus ponens

با فرض این که کاربر با موشواره روی زیر فرمولی از A یا روی زیر فرمولی از B در $A \wedge B$ کلیک کرده باشد (که آن را با کشیدن مربع به دور انتخاب مورد نظر نشان می‌دهیم) قاعدهٔ فوق به دو قاعدهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{B}}}{\Gamma \vdash A \wedge \boxed{\mathrm{B}}}$$

این روش برای تمام قواعد گزاره‌ای سیستم کلاسیک گنسنی به صورت زیر بیان شده است [۲]:

$$\wedge L_1 : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, B, A \wedge B, \Gamma \vdash C}{\boxed{\mathrm{A}} \wedge B, \Gamma \vdash C} \qquad \wedge R_1 : \frac{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \wedge B}$$

$$\wedge L_2 : \frac{A, \boxed{\mathrm{B}}, A \wedge B, \Gamma \vdash C}{A \wedge \boxed{\mathrm{B}}, \Gamma \vdash C} \qquad \wedge R_2 : \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{B}}}{\Gamma \vdash A \wedge \boxed{\mathrm{B}}}$$

$$\vee L_1 : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, A \vee B, \Gamma \vdash C \qquad B, A \vee B, \Gamma \vdash C}{\boxed{\mathrm{A}} \vee B, \Gamma \vdash C} \qquad \vee R_1 : \frac{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}}}{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \vee B}$$

$$\vee L_2 : \frac{A, A \vee B, \Gamma \vdash C \qquad \boxed{\mathrm{B}}, A \vee B, \Gamma \vdash C}{A \vee \boxed{\mathrm{B}}, \Gamma \vdash C} \qquad \vee R_2 : \frac{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{B}}}{\Gamma \vdash A \vee \boxed{\mathrm{B}}}$$

$$\to L_1 : \frac{A \to B, \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \qquad B, A \to B, \Gamma \vdash C}{\boxed{\mathrm{A}} \to B, \Gamma \vdash C} \qquad \to R_1 : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \to B}$$

$$\to L_2 : \frac{A \to B, \Gamma \vdash A \qquad \boxed{\mathrm{B}}, A \to B, \Gamma \vdash C}{A \to \boxed{\mathrm{B}}, \Gamma \vdash C} \qquad \to R_2 : \frac{A, \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{B}}}{\Gamma \vdash A \to \boxed{\mathrm{B}}}$$

$$\neg L : \frac{\neg A, \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}}}{\neg \boxed{\mathrm{A}}, \Gamma \vdash \bot} \qquad \neg R : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, \Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg \boxed{\mathrm{A}}}$$

همچنین برای قواعد موجه نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Box L : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, \Box A, \Gamma \vdash C}{\Box \boxed{\mathrm{A}}, \Gamma \vdash C} \qquad \Box R : \frac{\Box\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}}}{\Box\Gamma \vdash \Box \boxed{\mathrm{A}}}$$

$$\Diamond L : \begin{cases} \dfrac{A_1, \ldots, \Diamond A_n, \Box\Gamma \vdash \Diamond C \ \ldots\ \Diamond A_1, \ldots, \boxed{A_i}, \ldots, \Diamond A_n, \Box\Gamma \vdash \Diamond C \ \ldots\ \Diamond A_1, \ldots, A_n, \Box\Gamma \vdash \Diamond C}{\Diamond A_1, \ldots, \Diamond \boxed{A_i}, \ldots, \Diamond A_n, \Box\Gamma \vdash \Diamond C} \\[2ex] \dfrac{A_1, \ldots, \Diamond A_n, \Box\Gamma \vdash \bot \ \ldots\ \Diamond A_1, \ldots, \boxed{A_i}, \ldots, \Diamond A_n, \Box\Gamma \vdash \bot \ \ldots\ \Diamond A_1, \ldots, A_n, \Box\Gamma \vdash \bot}{\Diamond A_1, \ldots, \Diamond \boxed{A_i}, \ldots, \Diamond A_n, \Box\Gamma \vdash \bot} \end{cases}$$

$$\Diamond R : \frac{\Gamma \vdash \boxed{C}}{\Gamma \vdash \Diamond\boxed{C}}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود فرضیات در قاعدهٔ $\Box R$ دارای پیشوند $\Box$ می‌باشند. لذا اگر فرضیاتی دارای پیشوند $\Box$ نبودند می‌توان آنها را به روش زیر با اعمال قاعدهٔ تضعیف [1] حذف کرد. خط زیر یک زیر فرمول به معنای انتخاب آن زیر فرمول توسط کاربر می‌باشد:

$$A, \Box B, C, \Box D \vdash \Box\underline{E} \implies \Box B, \Box D \vdash \Box\underline{E} \implies \Box B, \Box D \vdash \underline{E}$$

در نتیجه، این روند به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$A, \Box B, C, \Box D \vdash \Box\underline{E} \implies \Box B, \Box D \vdash \underline{E}$$

همچنین با توجه به این که فرمول سمت راست رشته در قاعدهٔ $\Diamond L$، $\Diamond C$ یا $\perp$ است، اگر فرمولی بدون پیشوند $\Diamond$ در سمت راست رشته قرار داشته باشد می‌توان آن را با اعمال قاعدهٔ $\perp R$ به $\perp$ تبدیل کرد. همچنین می‌توان فرضیات بدون پیشوند $\Box$ را با اعمال قاعدهٔ تضعیف حذف کرد. در نتیجه داریم:

$$A, \Diamond\underline{B}, C, \Box D \vdash E \implies \Diamond\underline{B}, \Box D \vdash E \implies \Diamond\underline{B}, \Box D \vdash \perp \implies B, \Box D \vdash \perp$$

این روند را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$A, \Diamond\underline{B}, C, \Box D \vdash E \implies B, \Box D \vdash \perp$$

با توجه به قواعد فوق این روش دارای دو خاصیت مهم زیر است:

۱) خاصیت خوش بنیادی [2]: فرمول‌های درون مربع در فرضیات مقدم، کوچکتر از فرمولی هستند که در نتیجه آمده است. در نتیجه روند به رو آمدن فرمول انتخاب شده پایان یافته [3] است.

۲) خاصیت یکتایی [4]: برای هر هدف و انتخاب حداکثر یک قاعدهٔ قابل اعمال وجود دارد. این خاصیت، قطعیت [5] را نتیجه می‌دهد.

منظور از رو آمدن زیر فرمول انتخابی این است که با به کار بردن قواعد، آنقدر فرمول‌ها را کوچک کنیم تا به زیر فرمول انتخابی برسیم.

بنابراین با داشتن یک انتخاب می‌توانیم الگوریتمی ارائه دهیم که یک سری قواعد را اجرا کند. در این الگوریتم هر مرحله را با($\Longrightarrow$) نشان می‌دهیم که بیانگر کاربردی از قواعد فوق است. همچنین

---

1) weaken 2) Well foundeness 3) terminated 4) Uniqueness 5) determinism

برای ساده‌تر شدن روند اثبات، نام قاعده را از متن حذف می‌کنیم. خطی که بالای آخرین مرحله کشیده شود به معنی کامل شدن شاخهٔ اثبات با استفاده از یک اصل یا یک قضیهٔ شناخته شده است و نیز خطی که زیر ترم مورد نظر کشیده می‌شود یک انتخاب را نشان می‌دهد.

نکته دیگر این که بنابر هم‌ارزی‌های زیر در $S4.3$ قاعده‌ای به نام نقطه و پرتاب را بیان می‌کنیم:

(۱) $\neg\Diamond A$ هم‌ارز است با $\Box\neg A$.

(۲) $\neg\Box A$ هم‌ارز است با $\Diamond\neg A$.

این قاعده در اثبات به روش نقطه‌گذاری زمانی به کار می‌آید که کاربر با استفاده از هم ارزی‌های فوق بخواهد پیشوند $\neg\Diamond$ را به $\Box\neg$ و $\neg\Box$ را به $\Diamond\neg$ یا برعکس تبدیل کند. برای این منظور کاربر فرمول مذکور را با موس انتخاب می‌کند و هم زمان با فشاردادن یک کلید (مثلاً کلید $SHIFT$) از صفحهٔ کلید رایانه اقدام به تبدیل پیشوندهای مذکور می‌کند. این عمل را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\boxed{\neg\Diamond A}^{\,s}, \Gamma \vdash C \implies \Box\neg A, \Gamma \vdash C$$
$$\boxed{\neg\Box A}^{\,s}, \Gamma \vdash C \implies \Diamond\neg A, \Gamma \vdash C$$

برای به کار بردن قاعدهٔ طرد شق ثالث در الگوریتم نقطه‌گذاری به صورت زیر عمل می‌کنیم:
۱) کاربر با انتخاب فرمول A در رشته و فشار دادن همزمان کلیدی از صفحه کلید(مثلاً کلید Alt) فرمول $A \vee \neg A$ را به فرضیات اضافه می‌کند.
۲) رایانه بلافاصله قاعدهٔ $\vee L$ را اعمال می‌کند و منتظر انتخاب کاربر در دو زیر رشتهٔ حاصل می‌شود.

۱.۳ مثال. رشتهٔ $\neg\Diamond\neg A \vdash \Box A$ با این روش به صورت زیر اثبات می‌شود:

ابتدا کاربر روی $\Box A$ کلیک کرده، با فشاردادن همزمان کلید «ALT» فرمول $\Box A \vee \neg\Box A$ را به فرضیات اضافه می‌کند سپس رایانه با اعمال قاعدهٔ $\vee L$ آن را به دو رشتهٔ زیر تجزیه می‌کند:

$$\neg\Diamond\neg A \vdash \underline{\Box A}^{a} \implies \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Box A \implies \begin{cases} \overline{\Box A, \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Box A} \\ \\ \neg\Box A, \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Box A \end{cases}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود در اولین رشته رایانه بلافاصله با رسیدن به اصل، درخت اثبات را متوقف می‌کند ولی در دومین رشته منتظر انتخاب بعدی کاربر می‌ماند. بنابراین کاربر در رشتهٔ دوم روی فرمول $\neg\Box A$ کلیک کرده، همزمان کلید«$SHIFT$» را فشار می‌دهد. رایانه نیز اثبات را در آن

شاخه به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\underline{\neg\Box A}^{s}, \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Box A \implies \Diamond\neg A, \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Box A$$

سپس کاربر با انتخاب فرمول $\Diamond\neg A$ در فرمول $\neg\Diamond\neg A$ نقطهٔ جدید شروع را مشخص می‌کند. رایانه نیز اثبات را به صورت زیر به پایان می‌رساند:

$$\Diamond\neg A, \neg\Box A \vee \Box A, \neg\underline{\Diamond\neg A} \vdash \Box A \implies \overline{\Diamond\neg A, \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Diamond\neg A}$$

همانطور که در مثال فوق دیدیم هنگام به کار بردن قاعدهٔ $\neg L$ اگر سمت راست رشته فرمول $\perp$ قرار نداشت می‌توانیم با به کار بردن قاعدهٔ $\perp R$ آن را به صورت زیر تبدیل کنیم:

$$\Gamma, \neg\underline{A} \vdash C \implies \Gamma, \neg\underline{A} \vdash \perp \implies \Gamma \vdash A$$

که در اینجا آن را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

$$\Gamma, \neg\underline{A} \vdash C \implies \Gamma \vdash A$$

نهایتاً برای تکمیل الگوریتم نیاز داریم که قاعدهٔ تضعیف را به قواعد روش نقطه‌گذاری اضافه کنیم. به خصوص هنگامی که از قاعدهٔ $\Diamond L$ استفاده می‌کنیم برای حذف فرضیات بدون پیشوند $\Box$ نیاز داریم که از این قاعده استفاده کنیم. برای این منظور کاربر می‌تواند با موس فرمول A را انتخاب کند و همزمان یک کلید (مثلاً کلید $DELETE$) را فشار داده، آن فرمول را حذف کند. این مراحل را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\boxed{\text{A}}^{d}, \Gamma \vdash C \implies \Gamma \vdash C$$

نکتهٔ دیگر این که قاعدهٔ $\perp R$ به طور ضمنی در قواعد $\neg R$ و $\Diamond L$ ادغام شده است. اما برای تکمیل الگوریتم می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد:

کاربر با موس فرمول C را در طرف چپ رشته انتخاب می‌کند و همزمان یک کلید (مثلاً کلید R) را فشار می‌دهد در نتیجه آن فرمول حذف شده و به جای آن فرمول $\perp$ قرار می‌گیرد. این مراحل را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A, \Gamma \vdash \boxed{\text{C}}^{r} \implies \Gamma \vdash \perp$$

قاعدهٔ برش نیز با اضافه‌کردن رشتهٔ تجزیه شونده به فرضیات مقدم قواعد چپ، در این قواعد ادغام شده است. این قاعده به حالتی که فرض مقدم چپ آن اصل $excl - mid$ می‌باشد محدود شده است.

۲.۳ مثال. $\vdash \Diamond(A \vee B) \to \Diamond A \vee \Diamond B$

اثبات: ابتدا کاربر روی فرمول $\Diamond(A \vee B)$ کلیک می‌کند سپس رایانه اثبات را به صورت زیر ارائه می‌دهد:

$$\vdash \underline{\Diamond(A \vee B)} \to \Diamond A \vee \Diamond B \implies \Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B$$

سپس با کلیک کردن روی فرمول $\Diamond A$ و فشار دادن همزمان کلید «ALT» فرمول $\Diamond A \vee \neg\Diamond A$ را به فرضیات اضافه می‌کند. رایانه نیز بلافاصله پس از اضافه کردن این فرمول به فرضیات، قاعدهٔ $\vee L$ را به صورت زیر به کار می‌برد:

$$\Diamond(A\vee B)\vdash \underline{\Diamond A}^{a}\vee\Diamond B \implies \Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond A\vee\Diamond B$$
$$\implies \begin{cases}\Diamond A,\Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond A\vee\Diamond B\\ \neg\Diamond A,\Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond A\vee\Diamond B\end{cases}$$

حال کاربر ابتدا در طرف راست اولین رشته، روی زیر فرمول $\Diamond A$ کلیک می‌کند. سپس در دومین رشته، روی فرمول $\neg\Diamond A$ کلیک کرده، همزمان کلید «$SHIFT$» را فشار می‌دهد. رایانه نیز اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\begin{cases}\Diamond A,\Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\underline{\Diamond A}\vee\Diamond B\\ \underline{\neg\Diamond A}^{s},\Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond A\vee\Diamond B\end{cases}$$
$$\implies \begin{cases}\overline{\Diamond A,\Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond A}\\ \Box\neg A,\Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond A\vee\Diamond B\end{cases}$$

حال کاربر در رشتهٔ دوم، روی زیر فرمول B در فرمول $\Diamond A\vee\Diamond B$ کلیک می‌کند. رایانه نیز اثبات را در آن شاخه از درخت اثبات به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\Box\neg A,\Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond A\vee\underline{\Diamond B} \implies \Box\neg A,\Diamond(A\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond B$$

سپس کاربر روی زیر فرمول A در فرمول $\Diamond(A\vee B)$ کلیک می‌کند. رایانه نیز اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\Box\neg A,\Diamond(\underline{A}\vee B),\Diamond A\vee\neg\Diamond A\vdash\Diamond B \implies \Box\neg A,\underline{A}\vee B\vdash\Diamond B$$
$$\implies \begin{cases}A,\Box\neg A,A\vee B\vdash\Diamond B\\ B,\Box\neg A,A\vee B\vdash\Diamond B\end{cases}$$

در نهایت کاربر ابتدا در اولین رشته روی زیر فرمول A در فرمول $\Box\neg A$ و در دومین رشته روی زیر فرمول B در فرمول $\Diamond B$ کلیک می‌کند. رایانه نیز به صورت زیر اثبات را به پایان می‌رساند:

$$\begin{cases}A,\Box\neg\underline{A},A\vee B\vdash\Diamond B\\ B,\Box\neg A,A\vee B\vdash\Diamond\underline{B}\end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} A, \neg\underline{A}, \Box\neg A, A \vee B \vdash \Diamond B \implies \overline{A, \neg A, \Box\neg A, A \vee B \vdash A} \\ \overline{B, \Box\neg A, A \vee B \vdash B} \end{cases}$$

۴. ترجمهٔ اثبات از استنتاج طبیعی به زبان شبه طبیعی

یک روش نشان دادن اثبات رشته‌ها ارائهٔ اثبات با درخت اثبات می‌باشد. تجربه نشان داده است که با افزایش طول درخت اثبات، درخت‌های اثبات قابل نشان دادن نیستند. زیرا هم از نظر پهنا و هم از نظر طول افزایش می‌یابند. در مرجع [۳] روشی برای بیان اثبات‌ها ارائه شده است. این روش، اثبات‌ها را در استنتاج طبیعی به متن‌هایی ترجمه می‌کند که آن را زبان شبه طبیعی می‌نامیم. به عنوان نمونه این زبان، قواعد سیستم استنتاج طبیعی N برای $S۴.۳$ را که در سمت چپ جدول زیر ارائه شده‌است به صورت زیر به زبان شبه طبیعی ترجمه می‌کند:

$$excl - mid \ : \qquad A \vee \neg A$$

با اضافه کردن آن به فرضیات می‌توان آن را به صورت زیر ترجمه کرد:

$$Using\ Excluded\ Middle,\ A \vee \neg A$$

$$\vee E \ : \ \frac{\begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \\ A \vee B & C & C \end{matrix}}{C} \implies \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ A \vee B \end{bmatrix}$$

$So\ we\ have\ two\ cases:$

- $Suppose \quad A \quad (i)$
$$\begin{bmatrix} \Pi_2 \\ C \end{bmatrix}$$
- $Suppose \quad B \quad (j)$
$$\begin{bmatrix} \Pi_3 \\ C \end{bmatrix}$$

$We\ have\ \ C\ \ in\ both\ cases\ (i)\ and\ (j)$

$$\Box I \ : \ \frac{\begin{matrix} \Pi_1 & & \Pi_n & \Pi \\ \Box B_1 & \cdots & \Box B_n & A \end{matrix}}{\Box A} \implies$$

اگر $n = 0$:

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ A \end{bmatrix}$$

$$So \quad \Box A$$

اگر $n = ۱$:

$$\begin{array}{l} \qquad \begin{bmatrix} \Pi_۱ \\ \Box B_۱ \end{bmatrix} \\ In \;\; the\; context \;:\; \Box B_۱ \;\; (h_۱) \\ \qquad \begin{bmatrix} \Pi \\ A \end{bmatrix} \\ So\; we\; deduce \;\; \Box A \end{array}$$

اگر $n > ۱$:

$$\begin{array}{l} \qquad \begin{bmatrix} \Pi_۱ \\ \Box B_۱ \end{bmatrix} \\ \qquad \quad \vdots \\ \qquad \begin{bmatrix} \Pi_n \\ \Box B_n \end{bmatrix} \\ Altogether\; we\; have\; the\; context \;: \\ \qquad \Box B_۱ \;\; (h_۱) \\ \qquad \quad \vdots \\ \qquad \Box B_n \;\; (h_m) \\ Where \\ \qquad \begin{bmatrix} \Pi \\ A \end{bmatrix} \\ So\; we\; deduce \;\; \Box A \end{array}$$

بقیهٔ قواعد نیز به همین صورت ترجمه می‌شوند [۵].
توضیح این که اولاً قرار گرفتن اثبات‌ها در کروشه به معنی تکمیل اثبات به روش بازگشتی است. ثانیاً هر کجا به اثباتی تک رأسی رسیدیم عبارت "By (i) We have A" را به جای اثبات درون کروشه قرار می‌دهیم، که (i) اولین جملهٔ رو به بالاست که شماره‌گذاری شده است و در آن فرمول A وجود دارد. ثالثاً در قاعدهٔ $\Diamond E$ تنها ترجمهٔ آن با فرض $\Diamond C$ نوشته شده است. در صورت وجود $\perp$ می‌بایستی در کروشه‌ها به جای $\Diamond C$ ، $\perp$ و در جملات به جای $\Diamond C$ ، کلمه «Contradiction» را قرار دهیم.

۵. روش نقطه‌گذاری در متن

اکنون می‌خواهیم روشی را بیان کنیم که به طور هم زمان با کلیک کردن کاربر در متن اثبات، رایانه متن اثبات را به زبان طبیعی تولید کند. برای این منظور با استفاده از یک تابع $\hat{N}$ اثبات گنسنی را به یک اثبات استنتاج طبیعی ترجمه کرده و در نهایت رایانه با استفاده از ترجمهٔ قواعد سیستم

استنتاج طبیعی به زبان شبه طبیعی آن‌ها را به متن ترجمه و سپس متن جدید را جایگزین متن قبلی می‌کند.
همچنین می‌توان برای کمک به کاربر طوری برنامه‌ریزی کرد که رایانه برای انتخاب بهتر، رشته‌های بالای درخت اثبات را در اختیار کاربر قرار دهد. این مطلب را با ذکر یک مثال بیان می‌کنیم. در مثال زیر که همان اصل ۴ می‌باشد، انتخاب‌های کاربر را با قراردادن فرمول مذکور در مربع نشان داده‌ایم. منظور از N—اثبات، درخت اثبات در سیستم استنتاج طبیعی و منظور از M—اثبات درخت اثبات در سیستم گنسنی است.

۱.۵ مثال. می‌خواهیم با رایانه ترجمه‌ای، متنی از درخت اثبات رشتهٔ

$$\vdash \boxed{\Box(\Box A \to B)}^{\,a} \vee \Box(\Box B \to A)$$

ارائه دهیم. برای این منظور ابتدا کاربر فرمول $\Box(\Box A \to B)$ را انتخاب می‌کند و هم زمان کلید«ALT» را فشار می‌دهد. بنابراین رایانه فرمول $\Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$ را به فرضیات اضافه و سپس رشتهٔ زیر را در حافظه ذخیره می‌کند:

$$\Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) \qquad (۱)$$

سپس بلافاصله با اعمال قاعدهٔ $\vee L$ آن را به دو رشتهٔ زیر تجزیه و آنها را در حافظه ذخیره می‌کند.

$$(۱) \Longrightarrow \begin{cases} \Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) & (۲) \\ \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) & (۳) \end{cases}$$

اکنون با در نظر گرفتن این که $\Sigma_۱$، $\Sigma_۲$ و $\Sigma_۳$ به ترتیب اثبات‌هایی گنسنی برای رشته‌های (۱)، (۲) و (۳) هستند، با به کارگرفتن تابع $\hat{N}$ روی رشتهٔ (۱) یک N—اثبات برای فرمول زیر می‌سازد:

$$\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$$

این N—اثبات به صورت زیر است:

$$\hat{N}(\Sigma_۱) = \frac{\Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B) \qquad \hat{N}(\Sigma_۲) \qquad \hat{N}(\Sigma_۳)}{\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)} \vee E$$

سپس قاعدهٔ فوق را به متن ترجمه کرده، متن زیر را بر روی صفحهٔ مونیتور نمایش می‌دهد:

$Using\ Excluded\ Middle,\quad \Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$

$So\ we\ have\ two\ cases\ :$

- $Suppose\quad \Box(\Box A \to B) \quad (۱)$
  $Prove\ ۱:\ \boxed{\Box(\Box A \to B)} \vee \Box(\Box B \to A)$
- $Suppose\quad \neg\Box(\Box A \to B) \quad (۲)$
  $Prove\ ۲:\ \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

$We\ \ have\ \ \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\ \ in\ both\ cases\ (۱)\ and\ (۲)$

اکنون همان طور که در متن فوق دیده می‌شود کاربر فرمول $\Box(\Box A \to B)$ را در«$Prove$ ۱» فرض اول انتخاب می‌کند سپس رایانه این نشانه را بلافاصله به صورت زیر به رشتهٔ (۲) انتقال داده، اثبات را در آن شاخه دنبال و در نهایت رشتهٔ نهایی را در حافظه ذخیره می‌کند:

$$\Box(\Box A \to B) \vdash \underline{\Box(\Box A \to B)} \vee \Box(\Box B \to A) \implies \overline{\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B)}$$

سپس با تشخیص این که به یک اصل در سیستم گنسنی رسیده است، درخت اثبات را در این شاخه مسدود و آن را با استفاده از تابع $\hat{N}$ به N—اثبات زیر تبدیل می‌کند:

$$\hat{N}(\Sigma_{۳}) = \frac{\Box(\Box A \to B)}{\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)} \vee I$$

و به طور بازگشتی N—اثبات فوق را به متن ترجمه می‌کند و به صورت زیر نشان می‌دهد:

$Using\ Excluded\ Middle,\quad \Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$

$So\ we\ have\ two\ cases\ :$

- $Suppose\quad \Box(\Box A \to B)\quad (۱)$

  $By\ (۱)\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B)$

  $Obviously\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

- $Suppose\quad \neg\Box(\Box A \to B)\quad (۲)$

  $Prove\ ۲:\ \Box(\Box A \to B) \vee \boxed{\Box(\Box B \to A)}^{a}$

$We\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\ \ in\ both\ cases\ (۱)\ and\ (۲)$

حال کاربر همان طور که در متن فوق دیده می‌شود روی فرمول $\Box(\Box A \to B)$ در«$Prove$ ۲» کلیک می‌کند و هم زمان کلید «ALT» را فشار می‌دهد. سپس رایانه آن را بلافاصله به صورت زیر به رشتهٔ (۳) انتقال داده، اثبات را در آن شاخه دنبال و در نهایت رشته‌های نهایی را در حافظه ذخیره می‌کند:

$$\neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \boxed{\Box(\Box B \to A)}^{a} \implies$$
$$\Box(\Box B \to A) \vee \neg\Box(\Box B \to A), \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$$
$$\implies \begin{cases} \Box(\Box B \to A), \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) & (۴) \\ \neg\Box(\Box B \to A), \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) & (۵) \end{cases}$$

سپس مشابه مرحلهٔ قبل با مسدودکردن شاخهٔ درخت اثبات رشتهٔ (۴)، نتیجه را به صورت متن زیر

نمایش می‌دهد:

$Using\ Excluded\ Middle,\quad \Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$

$So\ we\ have\ two\ cases\ :$

- $Suppose\quad \Box(\Box A \to B)\quad (۱)$

  $By\ (۱)\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B)$

  $Obviously\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$
- $Suppose\quad \boxed{\neg\Box(\Box A \to B)}^{s}\quad (۲)$

  $Using\ Excluded\ Middle,\quad \Box(\Box B \to A) \vee \neg\Box(\Box B \to A)$

  $So\ we\ have\ two\ cases\ :$

  - $Suppose\quad \Box(\Box B \to A)\quad (۳)$

    $By\ (۳)\ we\ have\quad \Box(\Box B \to A)$

    $Obviously\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$
  - $Suppose\quad \boxed{\neg\Box(\Box B \to A)}^{s}\quad (۴)$

    $Prove\ ۳:\ \boxed{\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)}^{r}$

  $We\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\quad in\ both\ cases\ (۳)\ and\ (۴)$

$We\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\quad in\ both\ cases\ (۱)\ and\ (۲)$

حال همان طور که در متن فوق نشان داده شده است کاربر ابتدا روی فرمول $\neg\Box(\Box A \to B)$ کلیک می‌کند و هم زمان کلید «SHIFT» را فشار می‌دهد. سپس روی فرمول $\neg\Box(\Box B \to A)$ کلیک و هم زمان کلید«SHIFT» را فشار می‌دهد. رایانه نیز به ترتیب با استفاده از تبدیلات در $S۴,۳$ بلافاصله رشتهٔ (۵) را به صورت زیر تبدیل می‌کند:

$$\Diamond\neg(\Box B \to A)\ ,\ \Diamond\neg(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\qquad (٦)$$

سپس کاربر همان طور که در متن فوق نشان داده‌ایم روی فرمول $\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$ کلیک می‌کند و هم زمان کلید «R» را فشار می‌دهد. رایانه بلافاصله قاعدهٔ $\bot$R را روی رشتهٔ (٦) اعمال می‌کند و با توجه به این که تنها در دو قاعدهٔ $\neg$L و $\Diamond$L چنین رشته‌هایی به وجود می‌آیند، بلافاصله قاعدهٔ $\Diamond$L را اعمال و آن را به دو رشتهٔ زیر تجزیه می‌کند:

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases} \neg(\Box B \to A)\ ,\ \Diamond\neg(\Box A \to B) \vdash \bot & (۷) \\ \Diamond\neg(\Box B \to A)\quad ,\quad \neg(\Box A \to B) \vdash \bot & (۸) \end{cases}$$

سپس مشابه حالات قبل ترجمه M—اثبات فوق را به N—اثبات متناظر با آن به صورت زیر انجام

می‌دهد:

$$\hat{N}(\Sigma_۲) = \cfrac{\square(\square B \to A) \vee \neg\square(\square B \to A) \quad \cfrac{\square(\square B \to A)}{\square(\square A \to B) \vee \square(\square B \to A)} \vee I \quad \hat{N}(\Sigma_۴)}{\square(\square A \to B) \vee \square(\square B \to A)} \vee E$$

$$\hat{N}(\Sigma_۴) = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\square(\square B \to A)}{\Diamond\neg(\square B \to A)} \quad \cfrac{\neg\square(\square A \to B)}{\Diamond\neg(\square A \to B)} \quad \hat{N}(\Sigma_۵) \quad \hat{N}(\Sigma_۶)}{\bot} \Diamond E}{\square(\square A \to B) \vee \square(\square B \to A)} \bot E$$

(که در آن $\Sigma_۴$ ، $\Sigma_۵$ و $\Sigma_۶$ به ترتیب اثبات‌هایی گنسنی برای رشته‌های (۵)، (۷) و (۸) می‌باشند.)
اکنون رایانه متن زیر را جایگزین «$Prove$ ۳» می‌کند:

By (۲) $we\ have\quad \neg\square(\square A \to B), So\quad \Diamond\neg(\square A \to B)$

By (۳) $we\ have\quad \neg\square(\square B \to A), So\quad \Diamond\neg(\square B \to A)$

$So\ we\ have\ the\ defferent\ Cases$:

- $Assume\ \ \neg(\square B \to \boxed{A})$ (۵) $and\quad \Diamond\neg(\square A \to B)$ (۶)

  $Prove$ ۴ : $a\ contradiction$
- $Assume\ \ \neg(\square A \to B)$ (۷) $and\quad \Diamond\neg(\square B \to A)$ (۸)

  $Prove$ ۵ : $a\ contradiction$

$In\ all\ the\ possible\ cases\ ,\ we\ have\ a\ contradiction,\ so\ contradiction$

$So\ we\ can\ assert\quad \square(\square A \to B) \vee (\square B \to A)$

حال نیز همانطور که در متن فوق دیده می‌شود کاربر در فرض (۵) روی فرمول A کلیک می‌کند. رایانه نیز آن را بلافاصله به رشتهٔ (۷) انتقال داده اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\neg(\square B \to \underline{A})\ ,\ \Diamond\neg(\square A \to B) \vdash \bot \Longrightarrow \Diamond\neg(\square A \to B) \vdash \square B \to \underline{A} \quad (۹)$$

$$\Longrightarrow \Diamond\neg(\square A \to B)\ ,\ \square B \vdash A \quad (۱۰)$$

سپس آن را به صورت N—اثبات زیر ترجمه می‌کند:

$$\hat{N}(\Sigma_۵) = \cfrac{\cfrac{\hat{N}(\Sigma_۷)}{\square B \to A} \to I \qquad \neg(\square B \to A)}{\bot} \neg E$$

که در آن $\Sigma_۷$ اثباتی برای رشتهٔ (۱۰) است. اکنون رایانه متن زیر را جایگزین متن قبلی می‌کند:

By (۲) $we\ have\quad \neg\square(\square A \to B), So\ \Diamond\neg(\square A \to B)$

By (۳) $we\ have\ \ \neg\Box(\Box B \to A), So\ \Diamond\neg(\Box B \to A)$

$So\ we\ have\ the\ defferent\ Cases\ :$

- $Assume\ \ \neg(\Box B \to A)$ (۵) $and\ \Diamond\neg(\Box A \to \boxed{B}\,)$ (٦)

  $Assume\ \ \Box B$ (۹)

  $Prove$ ٦ $:\ A$

  $We\ have\ proved\ \ \Box B \to A$

  By (۵) $we\ have\ \ \neg(\Box B \to A)$

  $We\ have\ a\ contradiction$

- $Assume\ \ \neg(\Box A \to B)$ (۷) $and\ \ \Diamond\neg(\Box B \to A)$ (۸)

  $Prove$ ۵ $:\ a\ contradiction$

$In\ all\ the\ possible\ cases,\ we\ have\ a\ contradiction,\ so\ contradiction$

$So\ we\ can\ assert\ \ \Box(\Box A \to B) \vee (\Box B \to A)$

اکنون همانطور که در متن فوق دیده می‌شود کاربر در فرض (٦) روی فرمول B کلیک می‌کند سپس رایانه با انتقال آن به رشتهٔ (۱۰) اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\Diamond\neg(\Box A \to \underline{B})\ ,\ \Box B \vdash A \Longrightarrow \Diamond\neg(\Box A \to \underline{B})\ ,\ \Box B \vdash \bot \quad (۱۱)$$

$$\Longrightarrow \neg(\Box A \to \underline{B}), \Box B \vdash \bot \ \ (۱۲) \Longrightarrow \ \Box B \vdash \Box A \to \underline{B} \quad (۱۳)$$

$$\Longrightarrow \ \Box A\ ,\ \Box B \vdash B \quad (۱۴)$$

سپس ترجمهٔ N—اثبات زیر را انجام می‌دهد:

$$\hat{N}(\Sigma_۷) = \cfrac{\cfrac{\Diamond\neg(\Box A \to B) \qquad \Box B \qquad \cfrac{\cfrac{\hat{N}(\Sigma_۸)}{\Box A \to B}\to I \qquad \neg(\Box A \to B)}{\bot}\neg E}{\bot}\Diamond E}{A}\bot E$$

که در آن $\Sigma_۸$ اثباتی برای رشتهٔ (۱۴) است. حال رایانه متن زیر را جایگزین «$Prove$٦» می‌کند:

By (۹) $we\ have\ \ \Box B$

$In\ the\ context\ :\ \ \Box\boxed{B}$ (۱۰)

  By (٦) $we\ have\ \ \Diamond\neg(\Box A \to B)$

$If\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)$ (۱۱)

  $Assume\ \ \Box A$ (۱۲)

    $Prove$ ۷ $:\ B$

$We\ have\ proved\ \ \Box A \to B$

$By\ (۱۱)\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)$

$We\ have\ a\ contradiction$

$So\ we\ deduce\ a\ contradiction$

$So\ we\ can\ assert\ \ A$

در نهایت همان طور که در متن فوق دیده می‌شود کاربر در فرض (۱۰) روی فرمول B کلیک می‌کند. رایانه نیز اثبات را به صورت زیر را به پایان می‌رساند:

$$\Box A\ ,\ \Box\underline{B} \vdash B \implies \overline{\Box A, \frac{\Box B}{B} \vdash B} \qquad (۱۵)$$

سپس آن را به N—اثبات زیر ترجمه می‌کند:

$$\hat{N}(\Sigma_۸) = \frac{\Box B}{B}\Box E$$

و متن زیر را جایگزین متن فوق می‌کند:

$By\ (۹)\ we\ have\ \ \Box B$

$In\ the\ context\ :\ \ \Box B\ \ (۱۰)$

$By\ (٦)\ we\ have\ \ \Diamond\neg(\Box A \to B)$

$If\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)\ \ (۱۱)$

$Assume\ \ \Box A\ \ (۱۲)$

$By\ (۱۰)\ we\ have\ \ \Box B$

$In\ particular\ \ B$

$We\ have\ proved\ \ \Box A \to B$

$By\ (۱۱)\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)$

$We\ have\ a\ contradiction$

$So\ we\ deduce\ a\ contradiction$

$So\ we\ can\ assert\ \ A$

در نهایت با طی کردن همین مراحل برای «$Prove۵$» رایانه متن زیر را نشان می‌دهد:

$Using\ Excluded\ Middle,\ \ \Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$

$So\ we\ have\ two\ cases\ :$

- $Suppose\ \ \Box(\Box A \to B)\ \ (۱)$

  $By\ (۱)\ we\ have\ \ \Box(\Box A \to B)$

$Obviously\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

- $Suppose\quad \neg\Box(\Box A \to B)$ (۲)

$Using\ Excluded\ Middle,\quad \Box(\Box B \to A) \vee \neg\Box(\Box B \to A)$

$So\ we\ have\ two\ cases\ :$

- $Suppose\quad \Box(\Box B \to A)$ (۳)

  By (۳) $we\ have\quad \Box(\Box B \to A)$

  $Obviously\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

- $Suppose\quad \neg\Box(\Box B \to A)$ (۴)

  By (۲) $we\ have\quad \neg\Box(\Box A \to B), So\quad \Diamond\neg(\Box A \to B)$

  By (۳) $we\ have\quad \neg\Box(\Box B \to A), So\quad \Diamond\neg(\Box B \to A)$

  $So\ we\ have\ the\ defferent\ Cases\ :$

  - $Assume\ \neg(\Box B \to A)$ (۵) $and\quad \Diamond\neg(\Box A \to B)$ (٦)

    $Assume\ \ \Box B$ (۹)

    By (۹) $we\ have\quad \Box B$

    $In\ the\ context\ :\ \ \Box B$ (۱۰)

    By (٦) $we\ have\quad \Diamond\neg(\Box A \to B)$

    $If\ we\ have\quad \neg(\Box A \to B)$ (۱۱)

    $Assume\ \ \Box A$ (۱۲)

    By (۱۰) $we\ have\quad \Box B$

    $In\ particular\ \ B$

    $We\ have\ proved\quad \Box A \to B$

    By (۱۱) $we\ have\quad \neg(\Box A \to B)$

    $We\ have\ a\ contradiction$

    $So\ we\ deduce\ a\ contradiction$

    $So\ we\ can\ assert\ \ A$

    $We\ have\ proved\quad \Box B \to A$

    By (۵) $we\ have\quad \neg(\Box B \to A)$

    $We\ have\ a\ contradiction$

  - $Assume\ \neg(\Box A \to B)$ (۷) $and\quad \Diamond\neg(\Box B \to A)$ (۸)

    $Assume\ \ \Box A$ (۱۳)

    By (۱۳) $we\ have\quad \Box A$

    $In\ the\ context\ :\ \ \Box A$ (۱۴)

    By (۸) $we\ have\quad \Diamond\neg(\Box B \to A)$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad If\ we\ have\ \ \neg(\Box B \to A)\ \ (۱۵)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad Assume\ \ \Box B\ \ (۱۶)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad By\ (۱۴)\ we\ have\ \ \Box A\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad In\ particular\ \ A\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad We\ have\ proved\ \ \Box B \to A\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad By\ (۱۵)\ we\ have\ \ \neg(\Box B \to A)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad We\ have\ a\ contradiction\\
\qquad\qquad\qquad\qquad So\ we\ deduce\ a\ contradiction\\
\qquad\qquad\qquad\qquad So\ we\ can\ assert\ \ B\\
\qquad\qquad\qquad We\ have\ proved\ \ \Box A \to B\\
\qquad\qquad\qquad By\ (۷)\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)\\
\qquad\qquad\qquad We\ have\ a\ contradiction\\
\qquad\qquad In\ all\ the\ passible\ cases,\ we\ have\ a\ contradiction,\ so\ contradiction\\
\qquad\qquad So\ we\ can\ assert\ \ \Box(\Box A \to B) \vee (\Box B \to A)\\
\qquad We\ have\ \ \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\ \ in\ both\ cases\ (۳)\ and\ (۴)\\
We\ have\ \ \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\ \ in\ both\ cases\ (۱)\ and\ (۲)
\end{array}
$$

۶. نتیجه

سیستمی که طراحی شده از نظر ارتباط با کاربر بسیار ساده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

(۱) فرایند اثبات به صورت متن‌های اصلاح شدهٔ انگلیسی نمایش داده می‌شود.

(۲) می‌توان به سادگی از موشواره برای انتخاب فرمول در متن، برای اثبات استفاده کرد.

آنچه که در این مقاله معرفی کردیم، ایجاد نوعی اثباتگرِ قضیه است که با استفاده از قوانین شناخته شده، اثباتی هدفگرا برای رشته‌های منطق زمانی $S۴.۳$ ارائه می‌دهد. بنابراین به راحتی می‌توان نرم‌افزاری با این سیستم طراحی کرد.

البته روش‌های مشابه با آنچه در این مقاله آمده قبلاً انجام شده است. مثلاً باسین[1] اثباتگر قضیه ایزابل[2] مرجع [۱۲] را در مقالهٔ [۱] به کار برده‌اند. سیستمی که در این مقاله ارائه شده، شامل بسیاری از منطق‌های مشابه $S۴.۳$ می‌باشد. اثباتگر قضیهٔ ایزابل شامل یک زبان مشخص $\lambda prolog$ است که در منطق‌های مرتبهٔ و همکارانش بالا اعمال می‌شود. با مراجعه به این مرجع مشاهده می‌شود که تکنیک‌های اثبات با نقطه‌گذاری و نقطه و پرتاب را که در این مقاله به آن اشاره شد می‌توان به راحتی با این نوع سیستم‌ها تطبیق داد.

1) Basin 2) Isabelle

البته این سیستم هنوز مراحل اولیهٔ خود را طی می‌کند و هنوز از بازبینی الگوریتم‌ها فاصله دارد. بنابراین این سیستم فقط می‌تواند برای اثبات خواص زمانی ساده به کار رود و به سادگی به عنوان یک ابزار ایده‌آل برای یادگیری و آزمایش با منطق‌های زمانی مورد استفاده قرار گیرد. پس برای مسائل واقع‌بینانه‌تر و الگوریتم‌های بزرگ یک گام لازم، معرفی برخی یادداشت‌ها در این سیستم است که رایانه بتواند با استفاده از آن اثبات‌ها را بهتر بیان کند. همچنین اضافه‌کردن برنامه‌های خطایاب [۱] کاملاً خودکار، گام دیگری است که می‌توان برای تکمیل این نرم‌افزار برداشت. البته مانا [۲] و همکارانش در اثباتگر زمانی استانفورد [۳] (STeP) در این زمینه اقداماتی انجام داده‌اند [۱۰].

مراجع

[1] Basin, D. Matthews, S. Vigano, L. A modular presentation of modal logics in a logical framework, *proceedings of the Isabelle Users Workshop*, (1995).

[2] Bertot, Y. Kahn, G. Thery, L. Proof by pointing, *Theoretical Aspects of Computer Software*, Springer-Verlag LNCS, 789 (1994) 141-160.

[3] Coscoy, Y. Kahn, G. Thery, L. Extracting text from proofs, Typed Lambda calculus and Applications, Springer-Verlag LNCS, 902 (1995) 109-123.

[4] Felty, A. Implementing tactics and tacticals in a higher-order logic programming larg uage, J. *Automated Reasoning*, 11(1) (1993) 48-81.

[5] Felty, A. Thery, L. Interactive theorem proving with temporal logic, *Symbolic Computation*, 23 (1997) 367-397.

[6] Felty, A. Hagre, G. Explaining modal logic proofs, *Proc.of the IEEE International Conf.on Systems.Man.and Cybernetics*, (1988).

[7] Felty, A. Specifying and implementing theorem provers in a higher-order logic Programming language, PhD Thesis, University of Pennsylvania, (1989).

[8] Gore, R. Cut-free tableau and sequent systems for propositional normal modal logics, PhD Thesis, University of Camberidge, (1992).

[9] Gore, R. Tableau methods for modal and temporal logics, *Technical Report TR-ARP-15-95*, (1995).

1) Checkers 2) Manna 3) Stanford

[10] Manna, Z. et al, STeP: The Stanford temporal prover, *Technical Report STAN-CS-TR-94-1518*, (1994).

[11] Manna, Z. Pnueli, A. *The temporal logic of reactive and concurrent systems, Specification* , Springer-Verlag, (1992).

[12] Paulson, L. C. Isabelle: *A generic theorem prover*, Springer-Verlag LNCS, 828 (1994).

[13] Prawit, D. *Natural deducation*, Almqvist and Wiksell, Uppsala,Sweden, (1995).

[14] Szabo, M. E., *The collected papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, (1969).

مجتبی آقایی
دانشکده ریاضی ـ دانشگاه صنعتی اصفهان
پست الکترونیک aghaei@cc.iut.ac.ir
سید ابوالقاسم کلانتری
دانشکده ریاضی ـ دانشگاه صنعتی اصفهان