فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۹۳ تا ۹۹

آنالیز غیراستاندارد

محمود بینای مطلق

۱. مقدمه

از ابتدای پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال تا دوران معاصر، ایدهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها[۱] ابزار شهودی مناسبی برای یافتن نتایج جدید در آنالیز بود. ولی متأسفانه پاسخگوی دقت ریاضی نبود. جالب است که خود لایب نیتس می‌گفت: «من به آنها ایمان دارم، هر چند از نظر منطقی هنوز توجیه کافی برای آنها ندارم.» این خود از نظر فلسفهٔ ریاضی جالب است ولی وارد بحث آن نمی‌شویم. بالاخره به‌خاطر ایجاد دقت ریاضی، ریاضی‌دانان به $\epsilon - \delta$ پناه بردند.

حدود چهل سال پیش آبراهام رابینسون با ارائهٔ مدلی معادل مدل مقدماتی ولی غیرایزومورف با هیأت مرتب اعداد حقیقی در زبان هیأت، نشان داد که بی‌نهایت کوچک‌ها، همراه با بی‌نهایت بزرگ‌ها، کاملاً از مشروعیت برخوردارند.

۲. ساختن $\mathbb{R}^*$

به روش ساختن $\mathbb{R}$ از $\mathbb{Q}$ نگاه کنیم. فرض کنید $\mathrm{Cauchy} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ مجموعهٔ دنباله‌های کشی از اعداد گویا باشد. یک رابطهٔ هم‌ارزی به صورت زیر روی آن تعریف می‌کنیم:

$$(u_n - v_n) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{u_n\} \sim \{v_n\}$$

با این رابطه، $u_n = \frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{2n}$ و $w_n = \frac{1}{n^2}$ و $z_n = \frac{1}{2^n}$ همه یک عدد، یعنی صفر را معرفی می‌کنند. در حالی‌که اگر «عضو به عضو» مقایسه شوند یکی دو برابر دیگری است، یا یکی «بی‌نهایت کوچک از مرتبه اول»، دیگری «بی‌نهایت کوچک از مرتبه دوم» و آخری بی‌نهایت کوچک از مرتبه بی‌نهایت است، البته با ابزاری مناسب برای مقایسه. برای ساختن $\mathbb{R}$، می‌توان به راحتی مجموعهٔ اولیه را بسیار بزرگ گرفت: تمام $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ به‌جای Cauchy، و می‌توان رابطه $\sim$ را

1) infinitesimal

ظریف‌تر انتخاب کرد. در این‌صورت $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\sim$ هیئتی بسیار بزرگ از آب در می‌آید که $\mathbb{R}$ را به‌عنوان دسته‌ای مرکزی در بردارد. برای تعریف $\sim$ نخست به مفهوم فیلتر نیاز است: فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرتهی است. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$، مجموعه‌ای غیرتهی، یک فیلتر روی X خوانده می‌شود هرگاه:

$$A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{F} \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathcal{F} \tag{۱}$$

$$A \in \mathcal{F},\ B \supseteq A \ \Rightarrow\ B \in \mathcal{F} \tag{۲}$$

$$\emptyset \notin \mathcal{F} \tag{۳}$$

از (۲) نتیجه می‌شود که همواره $X \in \mathcal{F}$ و از (۳) نتیجه می‌شود که $\mathcal{F} \subsetneq \mathbb{P}(X)$.

۱.۲ مثال. $\mathcal{F}_A = \{B \subseteq X \mid B \supseteq A\}$ را که $A \subseteq X$ فیلتر اساسی گویند. فیلتری که برای ما مهم است فیلتر فرشه روی $\mathbb{N}$ یعنی $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A^c| < \infty\}$ است که فیلتر بودن آن به راحتی دیده می‌شود.

فیلتر $\mathcal{U}$ را یک اولترافیلتر نامند هرگاه فیلتری ماکزیمال باشد (بین آن و $\mathcal{P}(X)$ فیلتر دیگری نباشد). با کمک لم تسورن (که معادل اصل انتخاب است) می‌توان نشان داد که هر فیلتری را می‌توان در یک اولترافیلتر نشاند. امّا خود این مطلب می‌تواند به‌عنوان اصل پذیرفته شود که معادل اصل ایده‌آل ماکزیمال (در یک جبر بول) و به‌نوبهٔ خود معادل با قضیهٔ کمال تعمیم یافته است و اکیداً از اصل انتخاب ضعیف‌تر است.

یکی از خواص اولترافیلتر که برای ما مهم است این است که اگر $A \cup B \in \mathcal{U}$ آنگاه $A \in \mathcal{U}$ یا $B \in \mathcal{U}$ و دیگر این‌که برای هر $A \subseteq X$، $(A \in \mathcal{U} \vee A^c \in \mathcal{U})$.

اکنون به تعریف $\sim$ بپردازیم:
فرض کنیم $\mathcal{U}$ یک اولترا فیلتر غیراساسی باشد. اگر $f,\ g,\ h \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ تعریف می‌کنیم:

$f \sim g$ اگر $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.

خواص فیلتر فوراً نتیجه می‌دهد که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی f را با $\bar{f}$ یا $[f]$ نشان می‌دهیم.

۲.۲ تعریف روابط و توابع

برای $\bar{f} < \bar{g}$ داریم $\bar{f} < \bar{g} \Leftrightarrow \{i \mid f(i) < g(i)\} \in \mathcal{U}$. اصل تثلیث برقرار است زیرا:

$$\{i \mid f(i) < g(i)\} \cup \{i \mid f(i) = g(i)\} \cup \{i \mid f(i) > g(i)\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U},$$

پس $\{i \mid f(i) < g(i)\} \in \mathcal{U}$ یا $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$ یا $\{i \mid f(i) > g(i)\} \in \mathcal{U}$
در نتیجه یکی از سه حالت $\bar{f} < \bar{g}$، $\bar{f} = \bar{g}$، یا $\bar{f} > \bar{g}$ همواره برقرار است.

جمع و ضرب توابع را به صورت مؤلفه به مؤلفه تعریف می‌کنیم، مثلاً $\bar{f}+\bar{g}=\bar{h}$ هرگاه $\{i \mid h(i)=f(i)+g(i)\}\in\mathcal{U}$.
نشاندن $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{Q}^*$ سرراست است: $q\mapsto\overline{q^\#}$ که $q^\#(i)=q$، یعنی $\overline{q^\#}$ کلاس هم‌ارزی دنبالهٔ ثابت با مؤلفه‌های q است. اکنون ببینیم که اعداد بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ را هم داریم. مجموعهٔ اعداد بی‌نهایت کوچک $\mathbb{Q}_۰$، مجموعهٔ اعداد متناهی $\mathbb{Q}_۱$ و مجموعهٔ اعداد نامتناهی $\mathbb{Q}_\infty$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbb{Q}_۰=\{x \mid \bigwedge_{n\in\mathbb{N}}(|x|<\tfrac{۱}{n})\},\quad \mathbb{Q}_۱=\{x \mid \bigvee_{n\in\mathbb{N}}(|x|<n)\},\quad \mathbb{Q}_\infty=\mathbb{Q}_۱^c.$$

برای دنبالهٔ $\epsilon:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ با ضابطه $\epsilon(n)=\frac{۱}{n}$، $\bar{\epsilon}$ یک عدد بی‌نهایت کوچک است، چون برای هر n،

$$\{i \mid \epsilon(i)<\frac{۱}{n}\}=\{n+۱,n+۲,\ldots\}=\{۱,۲,\ldots,n\}^c\in\mathcal{U}$$

برای دنباله $w(n)=n$، $\bar{w}$ یک عدد بی‌نهایت بزرگ می‌باشد.
به‌راحتی می‌توان دید که $\mathbb{Q}_۱$ یک حلقه و $\mathbb{Q}_۰$ در آن یک ایده‌آل ماکزیمال است، و داریم $\mathbb{R}\cong\mathbb{Q}_۱/\mathbb{Q}_۰$.
اکنون اگر بخواهیم می‌توانیم با $\mathbb{R}$ شروع کنیم و بگوییم: $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}^\mathbb{N}/\sim$، و $\mathbb{R}_۰$ و $\mathbb{R}_۱$ و $\mathbb{R}_\infty$ را هم به‌همان ترتیب تعریف کنیم. باز هم خواهیم داشت $\mathbb{R}\cong\mathbb{R}_۱/\mathbb{R}_۰$. کافی است فقط یکبار زحمت $\epsilon/۲$ و غیره را برای نشان دادن ایده‌آل بودن $\mathbb{R}_۰$ در $\mathbb{R}_۱$ بکشیم، در بقیه موارد همه چیز به‌راحتی حل می‌شود (در حالی که در آنالیز معمولی این زحمت هر بار باید تکرار شود!).

هیأت مرتب و کامل با تقریب ایزومورفیسم یکتاست! البته اعداد صحیح و اعداد کسری نیز در $\mathbb{R}^*$ قابل تعریفند:
$\bar{f}\in\mathbb{N}^*$ یا $\bar{f}\in\mathbb{Q}^*$ هرگاه متناظراً $\{i \mid f(i)\in\mathbb{N}\}\in\mathcal{U}$ یا $\{i \mid f(i)\in\mathbb{Q}\}\in\mathcal{U}$. $\bar{w}$ یک عدد صحیح بی‌نهایت بزرگ است و $\bar{\epsilon}$ یک عدد کسری بی‌نهایت کوچک. چون $\{i|\epsilon(i)\in\mathbb{Q}\}=\{i|w(i)\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}\in\mathcal{U}$ پس $\bar{w}\in\mathbb{N}^*$ و $\bar{\epsilon}\in\mathbb{Q}^*$.

۳.۲ چند تعریف

گوییم x بی‌نهایت به y نزدیک است و می‌نویسیم $x\simeq y$ اگر $x-y\in\mathbb{R}_۰$.
$\mu(x)=\{y \mid y\simeq x\}$ را هالهٔ x گوییم. $\mu(۰)=\{x \mid x\approx ۰\}$ یاهالهٔ صفر، مجموعهٔ تمام اعداد بی‌نهایت کوچک است، چون بی‌نهایت نزدیک به صفر می‌باشد. در نتیجه برای هر x داریم: $\mu(x)=x+\mu(۰)$ و $\mu(۰)=\mathbb{R}_۰$.
هر عدد متناهی x بی‌نهایت نزدیک به یک عدد استاندارد است، که آن عدد را بخش استاندارد x نامیده با $\mathrm{st}(x)$ نمایش می‌دهیم. از این پس اعداد بی‌نهایت کوچک را بیشتر با Δx و مشابه آن نشان می‌دهیم. لذا می‌توان نوشت $x=\mathrm{st}(x)+\Delta x$. به‌راحتی می‌توان دید که

$st(x \pm y) = st(x) \pm st(y)$، $st(x.y) = st(x).st(y)$ و اگر $st(y) \neq \circ$ آنگاه $st(\frac{x}{y}) = \frac{st(x)}{st(y)}$.

تابع $f : I \to \mathbb{R}$ که در آن I یک بازه در $\mathbb{R}$ است و نقطهٔ $a \in I$ مفروض است. حد و پیوستگی و مشتق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ اگر $\bigwedge_{x \in I^*}(x \approx a \to f(x) \approx L)$، و f در a پیوسته است اگر $\bigwedge_{x \in I^*}(x \approx a \to f(x) \approx f(a))$ و یا $f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x))$. قضایای مربوط به حد فوراً به‌دست می‌آیند. مثلاً برای پیوستگی $g \circ f$ داریم $g \circ f(\mu(x)) \subseteq g(\mu(f(x))) \subseteq \mu(g \circ f(x))$. اثبات تمام شد! آن‌هم با دقت کامل! مثال دیگر، پیوستگی حاصل ضرب دو تابع است:

$$\begin{aligned} f.g(x + \Delta x) &= f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) = (f(x) + \Delta u).(g(x) + \Delta v) \\ &= f(x).g(x) + \underbrace{f(x).\Delta v + g(x).\Delta u + \Delta u.\Delta x}_{\in \mathbb{R}_\circ} \approx f(x).g(x) \end{aligned}$$

مشتق f در نقطهٔ a را نیز در صورت وجود با نماد $f'(a) = \mathrm{st}(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x})$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در صورت وجود داریم: $f(a + \Delta x) = f(a) + \underbrace{\Delta x f'(a) + \Delta x.\Delta u}_{\in \mathbb{R}_\circ}$ در نتیجه اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است.

مثلاً برای $f(x) = x^n$، داریم $f'(x) = \mathrm{st}(\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x})$ و بنابراین

$$f'(x) = \mathrm{st}((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

و دستور مشتق زنجیری (از فرمول بالا استفاده شود) فوراً به دست می‌آید. در واقع از

$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \Delta x.\Delta u, \quad g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta x g'(x) + \Delta x.\Delta v$

داریم

$$g(f(x + \Delta x)) = g(f(x)) + (\Delta x f'(x) + \Delta x.\Delta u)g'(f(x)) + (\Delta x.f'(x) + \Delta x.\Delta u).\Delta v$$

و بنابراین $(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$.

پیوستگی یکنواخت نیز توسط فرمول $\bigwedge_{x \in I} \bigwedge_{y \in I}(x \approx y \to f(x) \approx f(y))$ تعریف می‌شود.

۴.۲ مثال. $x^۲$ روی $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته نیست: اگر $x \in \mathbb{R}_\infty$ آنگاه $x \approx x + \frac{۱}{x}$، امّا $(x + \frac{۱}{x})^۲ - x^۲ = ۲ + \frac{۱}{x^۲} \notin \mathbb{R}_\circ$. ولی $f(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$ در سراسر $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است:

$$\frac{۱}{۱ + x^۲} - \frac{۱}{۱ + (x + \Delta x)^۲} = \frac{۲x.\Delta x + \Delta x^۲}{(۱ + x^۲)(۱ + (x + \Delta x)^۲)}$$

اگر x متناهی باشد، صورت این کسر بی‌نهایت کوچک است و مخرج آن متناهی است و بی‌نهایت کوچک نیست و اگر x بی‌نهایت بزرگ باشد، مخرج بی‌نهایت بزرگ از درجه ۴ و صورت بی‌نهایت بزرگ از درجهٔ ۱ است.

۳. ابر ساختارهای بزرگ[1]

پس از بیان فواید بی‌نهایت کوچک‌ها، به معرفی ساختارهای بزرگ می‌پردازیم. به صورت خلاصه، یک مجموعه S در نظر می‌گیریم که از افراد تشکیل شده است. یک روبنا روی S عبارت است از $\hat{S}$ که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$S_\circ = S \quad , \quad S_{i+1} = S_i \cup \mathcal{P}(S_i) \quad , \quad \hat{S} = \cup_{i\in\mathbb{N}} S_i$$

U، زیرمجموعه‌ای از $\hat{S}$، یک جهان خوانده شود هرگاه خواص در خور را دارا باشد و در $\hat{S}$ متعدی باشد. I یک مجموعه اندیس غیرتهی که و مجموعه‌ای بسیار بزرگ خواهد بود و F یک اولترافیلتر روی آن است. برای $f, g : I \to \hat{S}$ گوییم $f \sim g$ اگر $f(i) \sim g(i)$ a.e. یعنی $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in F$. رابطهٔ سه یک رابطهٔ هم‌ارزی بوده و کلاس هم‌ارزی f با رابطهٔ سه را با $\bar{f}$ نمایش می‌دهیم.

به طور مشابه، تقریباً همه جا گزارهٔ $p(i)$ درست است را به $p(i)$a.e. نشان داده و به معنای $\{i \in I | p\mathcal{U}|\} \in F$ می‌باشد. مثلاً $\bar{f} \in \bar{g}$ به صورت $f(i) \in g(i)$ a.e. تعریف می‌شود. غیراستاندارد شدهٔ مجموعهٔ $A \in \hat{S}$ با A^* نمایش داده و به صورت $A^* = \{\bar{f} | f(i) \in A \text{ a.e.}\}$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم

$$Z_n = \{f \mid f(i) \in S_n \quad a.e.\}, \;\; Z = \bigcup_n Z_n, \;\; W = \{\bar{f} \mid f \in Z_\circ\}$$

و $\tilde{W}$ مانند $\hat{S}$ تعریف شود.

۱.۳ چند مثال از توپولوژی

فرض کنیم $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی X و برای $p \in X$، O_p مجموعهٔ بازهای حاوی p باشد. هالهٔ p مجموعهٔ $\mu(p) = \bigcap\{G^* \mid G \in O_p\}$ می‌باشد که G^* غیر استاندارد شده G در ساختار بزرگمان می‌باشد و تعریف می‌کنیم $q \approx p \Leftrightarrow q \in \mu(p)$ و $st(q) = p$ اگر $q \approx p$ و $p \in X$. معادل چند خاصیت توپولوژیک به صورت زیر است:

A باز است هرگاه $\bigwedge_{p\in A}(\mu(p) \subset A^*)$. A بسته است اگر $\bigwedge_{p\in A^c}(\mu(p) \cap A^* = \circ)$.

$f : X \to Y$ در x پیوسته است هرگاه $f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x))$. (توجه شود تعاریف در جهت درست حرکت می‌کنند نه در جهت عکس. دانشجویان سال اول معمولاً می‌پرسند چرا ϵ روی محور yها انتخاب می‌شود؟!)

X هاوسدورف است اگر برای هر p, q متمایز در X داشته باشیم $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$، و همچنین X فشرده‌است اگر $\bigwedge_{q\in X^*} \bigvee_{p\in X} (q \approx p)$.

---

1) superstructure 2) concurrent

۲.۳ قضیه تیخونوف. حاصلضرب مجموعه‌های فشرده، فشرده است.

اثبات. فرض کنیم X_i فشرده باشد و $X = \prod_{i\in I} X_i$ و $q \in X^*$، پس $q(i) \in X_i^*$ و بنابراین $\bigvee_{a_i \in X_i} (q(i) \approx a_i)$، لذا $a : I \to X$ که $a(i) = a_i$ همان نقطه‌ای است که برایش داریم $q \approx a$.
اصل انتخاب در این اثبات و در اثبات قضیهٔ مربوط حاصل‌ضرب فضاهای هاسدورف به‌کار نرفته ولی mI که ضعیف‌تر از آن است در به‌دست دادن ساختار به‌کار رفته است.
گروه‌های توپولوژیکی را هم می‌توان تعریف کرد و وجود اندازهٔ هار خیلی آسانتر اثبات می‌شود. اولین قضیهٔ آنالیز که توسط ابزار غیر استاندارد به اثبات رسید، متعلق به برنشتاین و رابینسون است که وجود زیرفضاهای ناوردای غیربدیهی را برای اپراتورهای چندجمله‌ای فشرده ثابت می‌کند. البته انتگرال‌گیری نیز به این زبان بسیار ساده‌تر می‌شود.
نلسون در مقالهٔ IST (Internal Set Theory) که هر یک از حروف سه‌گانه نمایانگر یک اصل است، روشی اصولی برای کار کردن با آنالیز غیراستاندارد ارائه و کاربرد آن را در احتمال نشان می‌دهد. انتهای مقاله بسیار بسیار جالب است و نشان می‌دهد که متغیر تصادفی δ, ϵی احتمالی مفهومی غیر لازم است و اگر یک عدد صحیح بی‌نهایت بزرگ بگیریم، احتمال، همان معنای حالت متناهی را حفظ می‌کند.
مکتب استراسبورگ (در فرانسه) هم اصولی و هم سیمانتیک به آنالیز غیراستاندارد می‌پردازد و در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آورد. روبرت کتابی دارد به‌نام آنالیز غیر استاندارد [۴]، که کتابی است مقدماتی ولی بسیار آموزنده که آن هم با سه اصل IST کار می‌کند.
برای آشنایی بیشتر با آنالیز غیراستاندارد به مراجع مراجعه کنید.

مراجع

[1] Davis, M: *Applied nonstandard analysis*, Wiley, 1978.

[2] Hurd, A.E, Loeb, P.A.: *An introduction to nonstandard real analysis,* Academic Press, 1985.

[3] Mendelson, E: *Introduction to mathematical logic,* Wadsworth and Brooks, Third Edition, 1987.

[4] Robert, A: *Nonstandard analysis,* Wiley, 1988.

محمود بینای مطلق
دانشکده ریاضی ـ دانشگاه صنعتی اصفهان
پست الکترونیک m-bina@cc.iut.ac.ir