

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشه ریاضی به طرح و سپس حل مسائلی در حد دروسی دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال یا حل مسائلی مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود آنها را به نشانی آقای دکتر محمد صالح مصلحیان که در ذیل مسائل آمده است، ارسال فرمایند. بدیهی است مسائلی دریافتی، که همراه با حل کامل باشند، به نام شخص فرستنده درج خواهد شد.

مسأله ۸۰: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ حقیقی با رتبه r و $\{h_1, \dots, h_{n-r}\}$ پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه همگن $Ax = 0$ باشد. نشان دهید که اگر y جوابی برای دستگاه ناهمگن $Ax = b$ ($b \neq 0$) باشد، آنگاه بردارهای $y, y + h_1, \dots, y + h_{n-r}$ ، مستقل خطی هستند. (حمید اسمعیلی، دانشگاه بوعلی سینا)

مسأله ۸۱: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که به عدد ثابتی مانند a همگراست. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$

مسأله ۸۲: فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$. ثابت کنید حداقل یک خط $y = y_0$ وجود دارد که $y_0 \in [0, 1]$ و هیچ جا بر نمودار f مماس نیست.

مسأله ۸۳: فرض کنید S مجموعه تمام اعداد حقیقی $x \in [0, 1]$ باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد گویای $\frac{p}{q}$ موجود است که $\frac{p}{q} < |x - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$. ثابت کنید S نامتناهی است و شامل هیچ بازه‌ای نیست.

مسأله ۸۴: ثابت کنید هر زیرگروه سیلوی یک گروه متناهی پوچتوان، نرمال است.

مسأله ۸۵: فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی (مثلاً $C([0, 1])$) باشد، $a \in A$ عملگر $T: A \rightarrow A$ عملگر $T(x) = xa$ باشد، $J = \cap \{a^n A : n \in \mathbb{N}\}$ و به ازای یک عدد $m \in \mathbb{N}$ $\overline{a^{m+1}A} = a^m A$ که در آن علامت بار نشان دهنده بستار است. ثابت کنید $T: J \rightarrow J$ یک به یک و پوشا است. (شیرین حجازیان، دانشگاه فردوسی)

مسئله ۸۶: فرض کنید n عددی طبیعی و a_n تعداد سه‌تایی‌های صحیح (x, y, z) صادق در $x + y = 2z$ با شرط $1 \leq x, y, z \leq n$ باشد. ثابت کنید که a_n در یک معادله تفاضلی که خواهید یافت صدق می‌کند. همچنین معادله $a_{n+1} - a_n = 1 + 2\left[\frac{n}{4}\right]$ را حل کنید. (آدینه محمد نارنجانی، دانشگاه فردوسی)

مسئله ۸۷: تمام چندجمله‌ای‌هایی را بیابید که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$f(x)f(x+1) = f(x^2+x+1)$$

(هانیه میرابراهیمی، دانشگاه فردوسی)

مسئله ۸۸: فرض کنید X یک فضای متریک و فشرده و $f: X \rightarrow X$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید زیرمجموعه $Y \subseteq X$ وجود دارد بطوریکه $f(Y) = Y$. (هانیه میرابراهیمی، دانشگاه فردوسی)

مسئله ۸۹: فرض کنید a, b, c اعداد حقیقی مثبتی باشند که $abc = 1$. ثابت کنید

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

(مجید میرزاویری، دانشگاه فردوسی)

نشانی: مشهد، دانشگاه فردوسی، صندوق پستی ۹۱۷۷۵-۱۱۵۹، گروه ریاضی، دکتر محمد صالح مصلحیان