

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشه ریاضی به طرح و سپس حل مسائلی در حد دروس دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال یا حل مسائلی مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود آنها را به نشانی آقای دکتر محمد صالح مصلحیان که در ذیل مسائل آمده است، ارسال فرمایند. بدیهی است که مسائلی دریافتی، که همراه با حل کامل باشند، به نام شخص فرستنده درج خواهد شد.

مسأله ۷۰: بدون استفاده از تفاضلات متناهی، تعداد سه‌تاییهای صحیح (x, y, z) صادق در $x + y = 2z$ با شرط $1 \leq x, y, z \leq n$ را بیابید. (آدینه محمد نارنجانی، دانشگاه فردوسی)

مسأله ۷۱: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد و به ازای یک عدد طبیعی k ، $A^k = 0$. ثابت کنید $A^n = 0$.

مسأله ۷۲: فرض کنید f و g دو تابع حقیقی پیوسته روی \mathbb{R} باشند و $f \circ g = g \circ f$. ثابت کنید اگر معادله $f(f(x)) = g(g(x))$ دارای جواب باشد، آنگاه معادله $f(x) = g(x)$ نیز دارای جواب است.

مسأله ۷۳: فرض کنید G یک گروه ناآبلی از مرتبه p^m با زیرگروهی آبلی از شاخص p باشد. ثابت کنید G دارای یک یا $p+1$ زیرگروه آبلی از شاخص p است، و در حالت دوم $|G : Z(G)| = p^2$. (هانیه میرابراهیمی، دانشگاه فردوسی)

مسأله ۷۴: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ از اعداد حقیقی داده شده است. فرض کنید به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ که $x_n \rightarrow 0$ ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ همگرا باشد. ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست.

مسأله ۷۵: فضای $X = \mathbb{R}^2$ با متر $d((x, y), (u, v)) = \max\{|x - u|, |y - v|\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید هر فضای متریک چهار نقطه‌ای (Y, ρ) را می‌توان به طور طولیا در X نشان داد، یعنی یک تابع $\varphi : Y \rightarrow X$ وجود دارد که برای هر $y_1, y_2 \in Y$ ، $\rho(y_1, y_2) = d(\varphi(y_1), \varphi(y_2))$.

مسأله ۷۶: ثابت کنید مجموعه جواب‌های گویای مثبت معادله سیاله $z^2 = x^2 + 2x^3$ به صورت $\{(x, y, z) | x = 2r, y = r, z = 4r, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ است.

مسأله ۷۷: به چند طریق می‌توان $5!$ را به صورت مجموع حداقل دو عدد صحیح متوالی نوشت؟ (مجید میرزاویری، دانشگاه فردوسی)

مسأله ۷۸: فرض کنید M و N دو ماتریس $n \times n$ باشند به طوری که $M^n = 0 = N^n$ و $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$. ثابت کنید M و N متشابه هستند.

مسأله ۷۹: فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. ثابت کنید تابع خطی $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ پیوسته است اگر و فقط اگر زیرمجموعه باز U از X و عدد $t \in \mathbb{C}$ وجود داشته باشند که $t \notin f(U)$.
(شیرین حجازیان، دانشگاه فردوسی)

نشانی: مشهد، دانشگاه فردوسی، صندوق پستی ۹۱۷۷۵-۱۱۵۹، گروه ریاضی
محمد صال‌مصلحیان