فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۳ (پاییز ۱۳۸۳) صص. ۲۱ تا ۲۹

انتخاب اجتماعی و توپولوژی

بنو اکمن

ترجمهٔ: محمد جلوداری ممقانی

چکیده

وجود یک الگوی انتخاب اجتماعی روی یک فضای رجحان P نه تنها مسالهای توپولوژیک که مسالهای هموتوپیک است. مؤلف این مسأله را ۵۰ سال پیش، با اصطلاحات دیگری و اندکی بعد با همکاری گانیا و هیلتون حل کرده بود. P باید یک $H-$ فضا باشد که یا انقباضی است یا همارز هموتوپیک با حاصل ضربی از فضاهای ایلنبرگ ـ مک لین روی اعداد گویا.
کلمههای اساسی: انتخاب اجتماعی، هم ارزی هموتوپیک، گروههای هموتوپی، فضاها و گروههای میانگین دار، $H-$ فضاها.

مقدمه

این مقاله بیشتر یک مقالهٔ مروری تاریخی است. موضوع آن کاربرد غیر منتظرهٔ اخیر توپولوژی جبری در زمینهی دیگری از تفکر بشری موسوم به الگوی «انتخاب اجتماعی» در اقتصاد است. نگاه کنید به $[C]$ که در آن برهانهای قضیهها، مبتنی بر استدلالهای توپولوژیکیاند. روشن شده است که قضیهٔ توپولوژیک اصلی در مقالهای که اینجانب ۵۰ سال پیش نگاشتهام، البته با نامی متفاوت («فضاهای میانگیندار») اثبات شده است، در آنجا مسألهی وجودی با استفاده از گروههای هموتوپی به «گروههای میانگین دار» تقلیل یافته است. در اینجا خلاصهای از مباحث مذکور، همراه با خاطراتی شخصی از زمینهٔ تاریخی بحث ارائه خواهد شد. در مقالهای جدیدتر (۱۹۶۲، همراه با تودو گانیا و پ.جی.هیلتون) ویژگیهای بیشتری از میانگینها بررسی شده است. نتایج این

مطالعات به نوبه‌ی خود می‌توانند ویژگی‌های جدیدی از الگوهای انتخاب اجتماعی را معرفی کنند.

۱ الگوی جدید انتخاب اجتماعی

۱.۱. اصطلاح انتخاب اجتماعی مدتی مدید است که در الگوهای اقتصاد ریاضی ظاهر می‌شود. (رجوع کنید به تذکر ۳.۱). در اینجا به روایت جدیدی از آن که چند سال بیشتر سابقه ندارد اشاره می‌کنیم. انتخاب اجتماعی الگویی برای تصمیم سازی در اقتصاد، علوم اجتماعی، علوم سیاسی و ...، است که به مسایل توپولوژیک و حتی هموتوپیک منجر می‌شود.

مجموعه‌ای چون P را که اعضای آن «رجحان» نام دارند در نظر می‌گیریم. این مجموعه یک ساختار توپولوژیک دارد (که معمولاً با یک متریک مشخص می‌شود). این امری طبیعی است زیرا رجحان‌ها اعداد، حقیقی یا مختلط، زیرمجموعه‌هایی از فضاهای عددی، بردارها، پیکربندی‌ها و غیره‌اند. به‌علاوه جامعه‌ای مرکب از n بنگاه به شماره‌های ۱، ۲، ...، n را در نظر می‌گیریم. هرگاه $p_j \in P$ رجحان بنگاه jاُم باشد عضو $(p_1, \ldots, p_n)$ متعلق به P^n ، حاصلضرب توپولوژیک n نسخهٔ P، را « رخ‌نمون (پروفایل) » جامعه می‌نامیم. انتخاب اجتماعی تابعی چون

$$F : P^n \longrightarrow P$$

است که به هر رخ‌نمون متعلق به P^n یک رجحان اجتماعی متعلق به P نسبت می‌دهد. این تابع باید در شرایط زیر صدق کند

الف ــ پیوستگی

ب ــ همانی

پ ــ همسانی

شرط (الف) شرطی طبیعی است: تغییرات کوچک در رخ‌نمون باید به تغییرات کوچک در برآمد منجر شوند.

شرط (ب) به این معناست که

$$F(p, p, \ldots, p) = p$$

به ازای هر $p \in P$. به عبارت دیگر هرگاه نگاشت Δ با $\Delta(p) = (p, \ldots, p)$ داده شود آنگاه ترکیب

$$P \xrightarrow{\Delta} P^n \xrightarrow{F} P$$

نگاشت همانی P است. زیر فضای $\Delta(P)$ از P^n را قطر P^n می‌نامیم.

شرط (پ) به این معنا است که F تحت تمام جایگشتهای اندیس‌های ۱، ۲، ...، n ، یعنی تحت گروه متقارن Σ_n، ناورداست (یعنی تمام بنگاه‌ها از حق انتخاب یکسان برخوردارند.)

۲.۱. روشن است که وجود نگاشت F مبتنی بر ویژگی‌های فضای P ، یک مسأله‌ی توپولوژیک است. این مسأله حتی مسأله‌ای هموتوپیکی است: در واقع به دنبال تابعی از حاصلضرب متقارن

P^n/Σ_n (تمام اعضای P^n را که تحت جایگشت‌های اندیس‌ها هم ارزند، یکی گرفته‌ایم) به P هستیم. این تابع روی قطر که بخشی از P^n/Σ_n است داده شده است و باید به سراسر P^n/Σ_n توسعه یابد. اما ویژگی توسعه یک تابع فقط به نوع هموتوپی فضاهای مربوط بستگی دارد ــ از حالت‌های نامتعارف اجتناب کرده و فرض می‌کنیم P همواره یک «چند وجهی» یعنی یک مجتمع سلولی است، و نیز همبند است.

من مسألهٔ وجود تابعی چون F از P^n به P با ویژگی‌های (الف)، (ب)، (پ) را پنجاه سال قبل در یکی از مقاله‌های خود [E] البته با اصطلاحات متفاوت، مورد بررسی قرار داده‌ام، آن موقع با اصطلاح انتخاب اجتماعی آشنا نبودم. از طرف دیگر روشن است که گروه اقتصادیِ پژوهش کننده در مفهوم جدید انتخاب اجتماعی، متشکل از خانم چیچلینسکی و همکاران وی (نگاه کنید به[C]) از وجود این مقالهٔ قدیمی اطلاعی نداشتند. من از این موضوع از طریق مقالهٔ هروات [H] که در ۲۰۰۱ منتشرشد، آگاه شدم، در این مقاله نوشته شده است «قضیه اساسی ...را ب.اکمن در سال ۱۹۵۴ اثبات کرده است.»

۳.۱. تذکر. در مقالهٔ مشهوری از آرو (برای مثال نگاه کنید به [K-S]) اصطلاح انتخاب اجتماعی در معنای دیگری به‌کار گرفته شده است (به این علت است که می‌گوییم «الگوی جدید انتخاب اجتماعی»). در آنجا تابع انتخاب اجتماعی σ از P^n به P باید در شرط (ب) و شرایط دیگری صدق کند، اما لازم نیست که در شرط (پ) صدق کند. از اصول آرو نتیجه می‌شود که σ لزوماً افکنش به روی یک نسخه، مثلاً نسخهٔ kام در P^n است، یعنی $\sigma(p_1,\dots,p_n)=p_k$ به‌ازای تمام اعضای P^n: بنگاه شماره‌ی k یک دیکتاتور است. در الگوی جدید این وضع به علت وجود شرط (پ) نمی‌تواند رخ دهد. به‌علاوه در [K-S] مجموعه‌ی رجحان‌ها یک فضای توپولوژیک نیست، اما شامل پیش ترتیب های مجموعه‌ی معینی چون X است.

۲ فضاهای میانگین‌دار

۱.۲. مقاله‌ای که من در ۱۹۵۴ منتشر کردم در بارهٔ «فضاهای میانگین‌دار» است. میانگین یا $n-$ میانگین، یا میانگین تعمیم یافته در فضای همبند P درست مانند تابع انتخاب اجتماعی F در بالاست.

مثال‌های مقدماتی $n-$ میانگین‌ها عبارتند از میانگین حسابی n عدد متعلق به بازه‌ای از اعداد حقیقی، و میانگین هندسی.

میانگین تعمیم یافته تاریخی طولانی دارد. کولموگورف این مفهوم را در ۱۹۳۰ طی مقاله‌ای [K] دربارهٔ میانگین‌های شبه حسابی معرفی کرد و مؤلفین مختلف مطالعهٔ آنها را در ارتباط با مسایل هندسی و حسابی ادامه دادند. یک مرحلهٔ مهم در این رابطه تز دکتری آومان (۱۹۳۳) تحت نظارت کاراتئودوری بود. در مقاله‌ی دیگری (۱۹۳۵) آومان شرایط (الف)، (ب) و (پ) فوق را اساساً برای زیر مجموعه‌های فضاهای عددی فرمولبندی کرد. وی در ۱۹۴۳ اظهار می‌دارد که

مسألهٔ وجود $n-$ میانگین برای فضاهای دلخواه یک مسألهٔ توپولوژیک است، وی این مسأله را فقط در چند حالت خاص حل می‌کند. بنابراین مسأله در زمانی که من تصمیم به بررسی آن از راه توپولوژی جبری با تأکید به روش جبری گرفتم حل نشده و مشهور بود.

۲.۲. در این‌جا شاید بیان خاطره‌ای تاریخی خالی از لطف نباشد. خاطر نشان می‌کنم که دورهٔ ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۴ نه تنها برای توپولوژی و جبر بلکه برای سایر شاخه های ریاضی نیز بسیار مهم بود. در این دوره رسته‌ها و فانکتورها که در ویراست اول ایلنبرگ و مک لین به عنوان زبانی برای فرمولبندی طبیعی بودن به‌کار رفته بودند به ابزارهای ریاضی تبدیل شدند. اکنون اما،ایلنبرگ و مک لین فانکتورها را از مدول‌ها به مدول‌ها یا به گروههای آبلی به‌کار می‌بردند (کتاب آنها در ۱۹۵٦ منتشر شد ؛ رسته‌های بسیار کلی‌تر در ضمیمه‌ای که د.بوشسباوم تهیه کرده ذکر شده است). کتاب «مبانی توپولوژی جبری» ایلنبرگ و استینراد (۱۹۵۲) در مورد فانکتورها از فضاها به گروه‌های آبلی است، اما رسته‌ها و فانکتورها در فصل ۴ آن ارائه شده‌اند.

۳.۲. برای تبدیل $n-$ میانگین از یک فضا به $n-$ میانگین در یک گروه، من فانکتورها را از فضاها به گروه‌ها به‌کار برده‌ام (توابع پیوسته به همریختی‌ها). روشن است که این وقتی موجه است که فانکتورها حاصلضرب‌ها را حفظ کنند، بنابراین توان P^n از n نسخهٔ P تبدیل می‌شود به حاصلضرب مستقیم n نسخهٔ گروه متناظر با آن.

هرگروه هموتوپی π_i از این ویژگی برخوردار است. نخست چند ویژگی $\pi_i(P)$ را یاد آوری می‌کنیم . اعضای $\pi_i(P)$ رده‌های هموتوپی نگاشت‌های $i-$ کرهٔ S^i به P هستند. (در واقع باید نقطهٔ مبنایی در S^i و در P انتخاب کنیم که بوسیله تمام نگاشت‌ها و هموتوپی‌ها حفظ شود. با این حال ساختار $\pi_i(P)$ برای فضاهای کمانی — همبند مستقل از انتخاب نقطهٔ مبنا است). عمل ترکیب اعضای گروه شبیه عمل ترکیب اعضای گروه بنیادی (حالت $i = ۱$) است و این گروه لزوماً آبلی نیست، اما به‌ازای $i \geq ۲$ آبلی است. ترکیب با نگاشتی چون $P \longrightarrow P'$ به نگاشتی القایی چون $\pi_i(P) \longrightarrow \pi_i(P')$ منجر می‌شود که یک همریختی است، با دیگر ترکیب‌های نگاشت‌ها سازگار است و طوری است که نگاشت همانی، یکریختی همانی را القا می‌کند — یعنی π_i در واقع یک فانکتور است. به‌علاوه نگاشت‌هایی از S^i به یک فضای حاصلضرب توپولوژیک به وسیلهٔ نگاشتهایی از S^i به مؤلفه‌های این حاصلضرب تعیین می‌شوند، یعنی π_i حاصلضرب‌ها را حفظ می‌کند.

در این زمینه اشاره می‌کنم که فضایی که در آن π_iها به‌ازای $i \geq ۲$ صفر می‌شوند، غیرکروی (aspherical) نامیده می‌شود. به علاوه اگر این فضا ساده ـ همبند نیز باشد آنگاه قضیه‌ای معروف از وایتهد بیان می‌کند که فضا انقباضی است (یعنی می‌تواند در توی خودش به طور پیوسته به یک نقطه فرو بریزد)، این حکم برای فضاهای مورد نظر ما یعنی چند وجهی‌های همبند برقرار است.

۴.۲. بنابراین گذر از فضاهای P با یک $n-$ میانگین به گروه‌های هموتوپی $\pi_i(P)$ این فضاها، به گروه‌هایی می‌انجامد که $n-$ میانگین‌هایی به مفهوم مذکور در بخش بعدی دارند. این عبور

می‌تواند در یک چشم برهم زدن و با استفاده از مفهوم فانکتور انجام پذیرد. با این حال، در مقالهٔ قدیمی‌ام ترجیح داده‌ام همه چیز را با محاسبهٔ صریح ثابت کنم ــ به نظر می‌رسد که زمان استفاده از مفهوم فانکتور در آن مقاله نرسیده بود!

گزارهٔ ۱. یک $n-$ میانگین در فضای P یک $n-$ میانگین همریخت در هر گروه هموتوپی $\pi_i(P)$ $i = ۱, ۲, \ldots,$ القا می‌کند.

۳ گروه‌های میانگین‌دار

۱.۳. گروه دلخواه G، آبلی یا غیر آبلی، با عمل ترکیب جمعی و عضو خنثای $\circ$ را در نظر می‌گیریم. یک $n-$ میانگین در G تابعی است چون

$$f : G^n \longrightarrow G$$

به طوری که (الف) f همریختی است و شرایط (ب) و (پ) سابق به‌ازای $n \geq ۲$ ای برقرارند. این شرایط G را به شدت محدود می‌کنند.
نخست توجه می‌کنیم که به‌ازای هر $x \in G$

$$f(x, \circ, \ldots, \circ) = f(\circ, x, \circ, \ldots, \circ) = \ldots = f(\circ, \circ, \ldots, x)$$

و این مقدار مشترک را با $g(x)$ نشان می‌دهیم. داریم

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

و

$$g(x) + g(y) = f(x, \circ, \ldots, \circ) + f(\circ, y, \ldots, \circ) = f(x, y, \circ, \ldots, \circ)$$

بنابراین $g(x) + g(y) = g(y) + g(x)$. به‌علاوه داریم

$$ng(x) = g(nx) = f(x, x, \ldots, x) = x$$

بنابراین $x + y = y + x$، یعنی G آبلی است. بنابراین ضرب n در G یک همریختی G است؛ چون بنا به مطالب بالا g وارون خودش است نتیجه می‌گیریم که ضرب در n یک خودریختی G است.

قضیهٔ ۲. هرگاه گروه G یک $n-$ میانگین به‌ازای $n \geq ۲$ ای بپذیرد آنگاه آبلی است، ضرب در n یک خودریختی G است، و G به‌طور یکتا بر n بخش‌پذیر است.

۲.۳. می‌توانیم خود ریختی g را با $n^{-۱}$ نشان دهیم. چون

$$nf(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = ng(x_۱ + \ldots + x_n) = x_۱ + \ldots + x_n$$

داریم

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n^{-1}(x_1 + \ldots + x_n).$$

بنابراین روی G فقط یک $n-$ میانگین، «میانگین حسابی» وجود دارد.
برعکس هرگاه گروه آبلی G بر n بخش پذیر باشد آنگاه یک (و فقط یک) $n-$ میانگین می‌پذیرد.
۳.۳. از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که هرگاه G با متناهی ـ مولد باشد و یک $n-$ میانگین بپذیرد آنگاه مرتبهٔ هر عضو آن باید نسبت به n اول باشد، به ویژه رتبهٔ هیچ عضو G بینهایت نیست .
هرگاه G با متناهی ـ مولد باشد و به‌ازای هر n یک $n-$ میانگین بپذیرد آنگاه $G = 0$.

۴ کاربرد در فضاهای توپولوژیک

۱.۴. با به کار بردن قضیه‌های مربوط به گروه‌ها در مورد فضای توپولوژیک میانگین‌دار نتیجه می‌شود که فضای P با یک $n-$ میانگین به‌ازای $n \geq 2$ ای، دارای گروه بنیادی آبلی است و تمام گروه‌های هموتوپی $\pi_i(P)$ آن به‌صورت یکتا بر n بخش‌پذیرند. برای مثال، هرگاه $P = S^k$، $k \geq 1$، آنگاه با توجه به $\pi_k(S^k) = Z$ ملاحظه می‌کنیم که کرهٔ S^k ، $n-$ میانگینی به‌ازای $n \geq 2$ نمی‌پذیرد.

۲.۴. فرض کنید P یک چند وجهی (مجتمع سلولی) باشد که گروه‌های هموتوپی آن صحیح و متناهی $-$ مولداند. فرض کنید که P به‌ازای هر n، $n-$ میانگین می‌پذیرد. چون $\pi_1(P)$ آبلی است پس با $H_1(P)$، اولین گروه همولوژی P با ضرایب صحیح، یکریخت است، چون این گروه متناهی $-$ مولد و بر هر n بخش پذیر است برابر است با $\{0\}$. بنابر قضیهٔ هورویچ $H_2 = \pi_2$، متناهی $-$ مولد است و بر تمام n ها بخش پذیر است و لذا برابر است با 0 و غیره. بنابراین تمام $\pi_i(P)$ها صفرند، و بنابر قضیهٔ وایتهد P انقباض پذیر است.

قضیهٔ ۳. هرگاه تمام گروه‌های همولوژی یک چند وجهی که به‌ازای هر n، $n-$ میانگین می‌پذیرند متناهی ـ مولد باشند آنگاه آن چند وجهی انقباض پذیر است.
این قضیه به‌ویژه در مورد چند وجهی‌های متناهی (متشکل از تعدادی متناهی سلول) به‌کار می‌رود.
برعکس هر فضای انقباض پذیر P، $n-$ میانگین‌هایی به‌ازای هر n می‌پذیرد زیرا P هم ارز هموتوپی با یک نقطه است.

۳.۴. در حالت مورد نظر ما، تعمیم سِر از قضیهٔ هورویچ به پیمانهٔ خانواده‌ای چون C از گروه‌های آبلی حاکی است که گزارهٔ «تمام گروه‌های هموتوپی به‌طور یکتا بر n بخش پذیرند» معادل همین گزاره در مورد تمام گروه‌های همولوژی (با ضرایب صحیح) است . من قبلاً از قضیهٔ سِر آگاه بودم اما مستقیماً ثابت کردم که گروه‌های همولوژی بر n بخش پذیرند، شاید باز فکر می‌کردم که استفاده از تعمیم‌های جدید مقاله را بسیار مشکل خواهد کرد.

بنابراین، مثلاً یک خمینهٔ بستهٔ جهت پذیر نمی‌تواند هیچ $n-$ میانگینی به‌ازای $n \geq ۲$ بپذیرد، زیرا در بعد بالا گروه همولوژی آن دوری نا متناهی است.

۵ فضاهای انقباض‌ناپذیر میانگین‌دار، $H-$ فضاها

۱.۵ . بحث گروه‌های میانگین‌دار در بخش ۳ به نتایج بیشتری می‌انجامد. بیشتر این نتایج در یک مقالهٔ بعدی (۱۹۶۲) مشترک با گانیا و هیلتون آمده‌اند [EGH].
می‌توان به روش زیر یک چند وجهی انقباض‌ناپذیر (نامتناهی) ساخت که به ازای هر n، $n-$ میانگین‌پذیر است . قرار می‌دهیم $P = K(Q,k)$ که در آن $K(Q,k)$ فضای ایلنبرگ ـ مک لین با ویژگی

$$\pi_i(P) = \begin{cases} \circ & i \neq k \\ Q & i = k \end{cases}$$

به ازای عدد صحیح و مثبت دلخواه $k \geq ۱$ است. این فضا را می‌توان با استفاده از سلول‌ها ساخت (با یک k ــ کره آغاز و از استوانه‌های نگاشتی استفاده می‌کنیم)، هرگاه k فرد باشد این فضا متناهی بعد است . چون گروه هموتوپی یک حاصلضرب توپولوژیکی برابراست با حاصلضرب مستقیم گروه‌های هموتوپی عوامل ضرب، داریم $P^n = K(Q,k)$. به ازای هر دو فضای $K(G_۱,k)$ و $K(G_۲,k)$ رده‌های هموتوپی نگاشت‌ها در یک تناظر دوسویی با همریختی‌های $G_۱ \longrightarrow G_۲$ قرار دارند. گروه Q بر تمام n ها بخش پذیر است. بنابراین $n-$ میانگین $Q^n \longrightarrow Q$ یک ردهٔ هموتوپی از نگاشت‌های $P^n \longrightarrow P$ را تعریف می‌کند. می‌توانیم نگاشتی را در نظر بگیریم که روی قطر $\Delta(P)$ همانی است، این نگاشت به‌طور هموتوپیک Σ_n ـ ناورداست. بنابر لمی از گروتندیک در مورد کوهمولوژی با ضرایب گویا (ردهٔ هموتوپی نگاشت‌ها از یک فضا به $K(Q,k)$ یک گروه کوهمولوژی از این نوع تشکیل می‌دهد) می‌توانیم نگاشتی به‌دست آوریم که اکیداً Σ_n- ناورداست.

قضیهٔ ۴ . $K(Q,k)$ به ازای هر n، $n-$ میانگین دارد.

۲.۵ . پیداست که این مثال برای هر فضای انقباض ناپذیری که به‌ازای هر n، $n-$ میانگین می‌پذیرد جنبهٔ اساسی دارد. نخست نشان می‌دهیم [EGH] که چنین فضایی یک $H-$ فضاست، کافی است نشان دهیم که این فضا برای $n \geq ۲$ای یک $n-$ میانگین دارد.
خاطر نشان می‌کنیم که یک $H-$ فضا فضایی چون X است که یک ضرب پیوسته $\mu : X * X \longrightarrow X$ روی آن تعریف شده‌است که تا حد هموتوپی دارای عضو خنثی دو طرفه‌ای چون $e \in X$ است. این به آن معنا است که دو نگاشت $\mu(e,p), \mu(p,e)$ ، $p \in X$ با تابع همانی هموتوپیک‌اند.

فرض کنید $F : P^n \longrightarrow P$ یک $n-$ میانگین به‌ازای یک n، $n \geq ۲$، باشد و $e \in P$. نگاشت $\phi : P \longrightarrow P$ با تعریف $\phi(p) = F(p,e,\ldots,e)$ به‌ازای هر $p \in P$ در هر گروه هموتوپی P دقیقاً هومورفیسمی را القا می‌کند که در بخش ۱.۳ ، g نامیده شد، که یک خودریختی است. بنابراین ϕ در

تمام گروه‌های هموتوپی یکریختی‌هایی و از این رو بنابر قضیهٔ وایتهد یک هم‌ارزی هموتوپی القا می‌کند. فرض کنید ψ وارون ϕ باشد، بنابراین $\psi\phi$ و $\phi\psi$ هر دو با تابع همانی P هموتوپیک هستند.
اکنون به‌ازای $p, q \in P$ قرار می‌دهیم

$$\mu(p,q) = \psi F(p,q,e,\ldots,e)$$

در این صورت به ازای هر $p \in P$ داریم $\mu(p,e) = \psi F(p,e,\ldots,e) = \psi\phi(p)$. این نگاشت با تابع همانی P هموتوپیک است، و همین استدلال در مورد $\mu(e,p)$ نیز درست است.

قضیهٔ ۵. هرگاه P به‌ازای $n \geq 2$ای یک $n-$ میانگین بپذیرد آنگاه یک H ــ فضاست.

۳.۵. با استفاده از قضیهٔ براودر [B] می‌توانیم نتیجه‌ای بسیار قوی از قضیهٔ فوق به‌دست آوریم. هرگاه P یک چندوجهی متناهی (حتی قدری کلی‌تر) و یک $H-$ فضا باشد آنگاه بنابر قضیهٔ براودر P یا انقباضی است یا در شرایط قضیهٔ دوگان پوانکاره مانند یک خمینهٔ جهت پذیر صدق می‌کند. بنابراین یک گروه همولوژی $H_k(P)$، $k \geq 1$ دوری نامتناهی است و از این رو روی P هیچ $n-$ میانگینی با شرط $n \geq 2$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

قضیهٔ ۶. هرگاه یک چند وجهی متناهی به ازای $n \geq 2$ای یک $n-$میانگین بپذیرد آنگاه انقباض پذیر است و بنابراین تمام $n-$ میانگین‌های آن وجود دارند. توجه کنید که این قضیه بسیار قوی‌تر از قضیهٔ ۳ در مورد چند وجهی‌هاست.

۴.۵. در مورد چند وجهی‌های (نامتناهی) غیر انقباضی P که به‌ازای هر n، $n-$ میانگین دارند ویژگی $H-$ فضا آن‌ها را کاملاً توصیف می‌کند. با استفاده از روش‌های استادانه‌تری که اساساً از هوپف و سِر هستند و این واقعیت که تمام گروه‌های هموتوپی P فضاهای برداری روی Q هستند می‌توان ثابت کرد:

قضیهٔ ۷. هرگاه P (غیر انقباضی) به ازای هر n، $n-$ میانگین داشته باشد نوع آن هموتوپی یک حاصلضرب توپولوژیک از فضاهای ایلنبرگ ــ مک لین $K(Q,k_\nu)$ است.

اکنون می‌توانیم نتایج جالبی در مورد الگوی انتخاب اجتماعی بیان کنیم. فضای رجحان P را به‌صورت حاصلضرب موجود در قضیهٔ ۷ و تابع انتخاب اجتماعی F را با تعداد دلخواهn بنگاه انتخاب می‌کنیم. در این صورت به ازای هر عدد ثابت $d > 0$ پروفایل‌های $(p_1,\ldots,p_n)$ وجود دارند که فاصلهٔ بین $F(p_1,\ldots,p_n)$ و p_j به‌ازای هر j بزرگتر از d است. [فرض بر این است که توپولوژی با یک متریک مناسب داده شده است.] این بدان معنا است که هیچ بنگاهی علیرغم میل خودش به‌طور تقریبی چیزی را که می‌خواهد به‌دست نمی‌آورد! مگر اینکه آنها در مورد راه حلی تدبیری بیندیشند.
حقیقت فوق ناشی از ساخت P است که با کره‌ها آغاز می‌شود، و این‌ها هیچ $n-$ میانگینی را به‌ازای

$n \geq 2$ نمی‌پذیرند. راه‌های دقیقی برای تبیین این نتایج وجود دارد. می‌خواستم نشان دهم که بجز در حالت انقباضی یا هیچ تابع انتخاب اجتماعی روی P نمی‌تواند وجود داشته باشد، یا اگر به‌ازای هر n وجود داشته باشد پیشامدهای غیرمنتظره رخ خواهد داد.

۵.۵ تذکر. مایلم مقالهٔ جدید شموئل واینبرگر [W] را درمورد ویژگی‌های توپولوژیک الگوی انتخاب اجتماعی معرفی کنم. واینبرگ از مقالات [E] و [EGH] در مورد میانگین‌های تعمیم یافته اطلاعی نداشت، این مقالات شامل تمام نتایج توپولوژیک [W]اند ــ بجز قضیهٔ ۷ ــ. ما از این موضوع اطلاع داشتیم ولی اهمیت کافی برای آن قایل نشدیم! در [W] اهمیت این قضیه به زیبایی بیان شده است و چند نکتهٔ تازه در مورد ویژگی‌های مختلف الگوی انتخاب اجتماعی وجود دارد.

سپاسگزاری

مترجم از آقای سیامک کاظمی (مرکز نشر دانشگاهی) برای ویرایش متن ترجمه بسیار سپاسگزار است.

مراجع

[B] W. Browder, On torsion in H-space, *Ann. Math.* (2) 74(1961), 24-51

[C] G. Chichinisky, Intersecting families of sets and the topology of cones in economics, *Bull. AMS* 29(1993), 189-207

[E] B. Eckmann, Räume mit Mittelbildungen, Comment. *Math. Helv.* 28(1954), 329-340.

[EGH] B. Eckmann, T. Ganea, P.J. Hilton, Generalized means, *Studies in Mathematical Analysis*, Stanford University Press (1962), 82-92

[H] C.D. Horvath, On the topological social choice problem, *Soc. Choice Welfare* 18(2001), 227-250

[K-S] Alan P. Kirman and Dieter Sondermann, Arrow's Theorem, many agents, and invisible dictators, *CORE Discussion Paper* 7142 (1971/72)

[K] A. Kolmogorov, Sur la notion de moyenne, Rendiconti Acad.dei Lincei 12(1930), 388-391

[W] S. Weinberger, On the topological social choice model, preprint 2003, to appear *in Soc. Choice Welfare*

مترجم: محمد جلوداری ممقانی

دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکدهٔ اقتصاد

پست الکترونیک j_mamaghani@atu.ac.ir