فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۱ (پاییز ۱۳۸۲) صص. ۷۷ تا ۷۹

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسائل یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود مسائل خود را به نشانی تهران، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۵۷۴۶ـ۱۹۳۹۵، محمدرضا پورنکی ارسال فرمایند. مسائلِ ارسال‌شده باید همراه با حل کامل مسأله باشد و در مجله به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

حل مسألهٔ ۵۶:

چون $(a,b)=1$، پس $(a+b,ab)=1$ و لذا $ord_b a$، $ord_a b$ و $ord_{ab}(a+b)$ همگی تعریف شده‌اند. گیریم $ord_b a = l$، $ord_a b = k$ و $ord_{ab}(a+b)=t$.

$$ord_{ab}(a+b)=t \Rightarrow (a+b)^t \overset{ab}{\equiv} 1 \left\{ \begin{array}{l} (a+b)^t \overset{a}{\equiv} 1 \Rightarrow b^t \overset{a}{\equiv} 1 \Rightarrow k|t \\ (a+b)^t \overset{b}{\equiv} 1 \Rightarrow a^t \overset{b}{\equiv} 1 \Rightarrow l|t \end{array} \right.$$

در نتیجه خواهیم داشت $[l,k]|t$. حال داریم:

$$\begin{array}{l} ord_b a = l \Rightarrow a^l \overset{b}{\equiv} 1 \Rightarrow (a+b)^l \overset{b}{\equiv} 1 \Rightarrow (a+b)^{[l,k]} \overset{b}{\equiv} 1 \\ ord_a b = k \Rightarrow b^k \overset{a}{\equiv} 1 \Rightarrow (a+b)^k \overset{a}{\equiv} 1 \Rightarrow (a+b)^{[l,k]} \overset{a}{\equiv} 1 \end{array}$$

در نتیجه با توجه به این که $(a,b)=1$ خواهیم داشت:

$$(a+b) \overset{ab}{\equiv} 1 \Rightarrow t|[l,k].$$

بنابراین $t=[l,k]$. $\square$

حل مسألهٔ ۵۷: واضح است که R و R' جابه‌جایی و از مشخصهٔ ۲ هستند. چون $0 \in R'$، پس پوشا بودن f نتیجه می‌دهد که $y \in R$ موجود است که $f(y)=0$. در نتیجه

$$f(0)=f(0y)=f(0)f(y)=f(0)0=0.$$

حال $a,b \in R$ را دلخواه بگیرید و آنها را تثبیت کنید. چون $f(a+b)-f(a)-f(b) \in R'$، پس $x \in R$ موجود است که $f(a+b)-f(a)-f(b)=f(x)$. می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{array}{l} f(ax)(f(a+b)-f(a)-f(b)) = f(ax)f(x) \\ \Rightarrow f(ax+abx)-f(ax)-f(abx) = f(ax) \\ \Rightarrow f(ax+abx) = f(abx) \\ \stackrel{f\text{یک به یک}}{\Longrightarrow} ax+abx = abx \Rightarrow ax = ۰ \quad (bx = ۰ \text{ به همین ترتیب}) \end{array}$$

اکنون داریم

$$\begin{array}{l} f(x)(f(a+b)-f(a)-f(b)) = f(x)f(x) \\ \Rightarrow f(ax+bx)-f(ax)-f(bx) = f(x) \\ \Rightarrow f(x) = ۰ \quad (f(۰)=۰,\ ax=bx=۰ \text{ با توجه به این که}) \end{array}$$

در نتیجه $f(a+b)=f(a)+f(b)$ و لذا $R \cong R'$. □

حل مسألهٔ ۵۸:

$$(AB)^{۲} = \begin{pmatrix} ۷۲ & ۱۸ & -۱۸ \\ ۱۸ & ۴۵ & ۳۶ \\ -۱۸ & ۳۶ & ۴۵ \end{pmatrix} = ۹ \begin{pmatrix} ۸ & ۲ & -۲ \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ -۲ & ۴ & ۵ \end{pmatrix} = ۹AB.$$

$$\Rightarrow B(AB)^{۲}A = B(۹AB)A \Rightarrow BABABA = ۹BABA$$

$$\Rightarrow (BA)^{۳} = ۹(BA)^{۳}.$$

از طرفی

$$\begin{array}{ll} rank(BA) & \geq rank(ABAB) \\ & = rank((AB)^{۲}) \\ & = rank(۹AB) \\ & = rank(AB) \\ & = ۲ \end{array}$$

پس $rank(BA)=۲$ و لذا BA وارونپذیر است. در نتیجه $BA=۹I$، یا

$$BA = \begin{pmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & ۹ \end{pmatrix}. \square$$

حل مسألهٔ ۵۹: فرض کنید $g \in G$ و $h \in H$ دلخواه باشند.
اگر $ghg^{-۱} \in G \backslash H$، آنگاه بنا بر فرض $u \in H$ موجود است که $g^{-۱}(ghg^{-۱})g = u^{-۱}(ghg^{-۱})u$، $h = u^{-۱}(ghg^{-۱})u$، یا $uhu^{-۱} = ghg^{-۱}$. در نتیجه $uhu^{-۱} \in G\backslash H$ که تناقض است. پس لزوماً $ghg^{-۱} \in H$ که نتیجه می‌دهد $H \trianglelefteq G$.
حال فرض کنید $x,y \in G$ دلخواه باشند.

اگر $x \in H$ آنگاه با توجه به نرمال بودن H در G داریم:

$$[x, y] = x^{-۱}y^{-۱}xy = x^{-۱}y^{-۱}xy = x^{-۱}(y^{-۱}xy) \in H.$$

اگر $x \in G\backslash H$، آنگاه $u \in H$ موجود است که $y^{-۱}xy = u^{-۱}xu$ و لذا با توجه به نرمال بودن H در G،

$$[x, y] = x^{-۱}y^{-۱}xy = x^{-۱}u^{-۱}xu = (x^{-۱}u^{-۱}x)u \in H.$$

پس در هر صورت $[x, y] \in H$ و لذا $G' \leq H$، که نتیجه می‌دهد G/H آبلی است. □