فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۸ (بهار ۱۳۸۱)، صص. ٤١ تا ۵۲

روشهای احتمالاتی در حل مسائل دترمینیستیک

بیژن ظهوری زنگنه

چکیده
اثبات قضیه‌های احتمال بر اساس تکنیکهای آنالیز ریاضی را در اغلب قضیه‌های نظریهٔ احتمال دیده‌ایم. در این مقاله قصد داریم که جریان معکوس این پدیده را یعنی کاربرد روشهای تصادفی در حمله به مسائل آنالیز کلاسیک را بررسی کنیم. یکی از ابتدایی‌ترین مثالهای این روشها اثبات قضیهٔ تقریب وایراشتراس به‌وسیله احتمالات است. این روشها در حل مسائل نظریهٔ پتانسیل، مسألهٔ دیریشله و مسألهٔ شرایط مرزی مارتین نیز کاربرد دارد.

در این مقاله سعی خواهیم کرد با زبان شهودی و غیررسمی به بعضی از این کاربردها بپردازیم.

احتمال به روایت تاریخ

نظریهٔ احتمال در ابتدا و نیز پس از آن برای مدتی طولانی، عبارت بود از صورت آرمانی و تحلیل برخی از پدیده‌های زندگی واقعی در خارج از حیطهٔ ریاضیات، اما اندک اندک در نیمهٔ نخست این قرن احتمال ریاضی، بخشی معمولی از ریاضیات شد. تا قرن پانزدهم هیچگونه بررسی علمی در مورد پیشامدهای تصادفی انجام نشد. دانش پژوهان ایتالیایی لوکا با چولی (۱۴۴۵ـ۱۵۱۴)، نیکولا تارتاگلیا (۱۴۹۹ـ۱۵۵۷)، جرولاموکاردانو (۱۵۰۰ـ۱۵۷۱)، از جمله پیشکسوتان دانش ریاضی هستند که احتمالهای مربوط به بسیاری از بازیهای تصادفی را محاسبه کرده‌اند. به‌قول دیود مامفرد در مقالهٔ طلوع عصر روشهای تصادفی «اگر

جلوتر بیاییم، می‌بینیم که در عصر رنسانس، کاردانو شخصیت بی‌نظیری است. او به خاطر کتاب فن کبیرش (۱۵۴۵) غالباً مبدع i خوانده می‌شود. ظاهراً وی یکی از خبره‌ترین افراد در زمینهٔ عملیات صوری جبر بود به‌طوری که تبعات قواعد منطقی جبر را یک گام فراتر از اسلاف خویش برد. ولی او در عین حال، معتاد به قمار هم بود و در کتاب «بازیهای شانسی» خود نخستین تحلیل را از قوانین شانس ارائه کرد، اما خجالت می‌کشید آن را انتشار دهد و این کتاب تا ۱۶۶۳ به چاپ نرسید، یعنی تقریباً مقارن با زمانی که یاکوب برنولی کار خود را آغاز کرد.» (مامفرد [[۱۵]). به هر حال پیشرفت واقعی در فرانسه از سال ۱۶۵۴ آغاز شد، از وقتی بلر پاسکال (۱۶۲۳ـ۱۶۶۲) و پیردو فرما (۱۶۰۱ـ۱۶۶۵) دو ریاضیدان نامی نامه‌هایی به یکدیگر رد و بدل کردند که در این نامه‌ها در مورد روشهای کلی محاسبهٔ احتمالها بحث کرده‌اند. در سال ۱۶۵۵ دانشمند معروف آلمانی کریستین هویگنس (۱۶۲۹ـ۱۶۹۵) به آنها پیوست، و این همکاری بسیار پر ثمر بود. در سال ۱۶۵۷ هویگنس اولین کتاب دربارهٔ احتمال را تحت عنوان «دربارهٔ محاسبات بازیهای شانسی» نوشت. این کتاب به منزلهٔ تولد واقعی احتمال محسوب می‌شود.

بعد از این تمام غول‌های ریاضی مانند برنولی، لاپلاس، پواسن و گاوس که استادان وقت در رشته‌های دیگر ریاضی بودند، قضیه‌های غلط و یا کم دقتی را در احتمال ثابت کردند تا اینکه در سال ۱۹۰۰ در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانها در پاریس، دیوید هیلبرت (۱۸۶۳ـ۱۹۴۳) ۲۳ مساله را که به عقیدهٔ او حل آنها در پیشرفت ریاضیات مؤثر بود پیشنهاد کرد. یکی از این مسایل، بحث اصول موضوعی نظریهٔ احتمال بود. در راستای رسیدن به این هدف کارهایی به وسیله امیل بورل (۱۸۷۱ـ۱۹۵۶)، و برنشتاین (۱۸۸۰ـ۱۹۶۸) انجام شد، تا اینکه در سال ۱۹۳۳ اندری کولموگورف (۱۹۰۳ـ۱۹۸۷) به صورتی موفقیت‌آمیز نظریهٔ احتمال را اصل موضوعی کرد.

نظریهٔ احتمال کلموگرف بر اساس نظریهٔ اندازه لبگ (۱۹۰۲) بنیان گذاشته شد. کلموگرف در نخستین صفحات تک‌نگاشت مشهور خود دربارهٔ نظریهٔ احتمال صراحتاً می‌گوید که متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار، همان توابع اندازه‌پذیرند و امیدهای ریاضی انتگرالهای آنها معهذا، اندازه‌پذیری یک تابع حقیقی مقدار را تعریف می‌کند و وقتی که می‌خواهد امید ریاضی یک متغیر تصادفی را تعریف کند صاف و ساده نمی‌گوید که این مقدار برابر است با انتگرال متغیر تصادفی نسبت به اندازهٔ احتمال مفروض، بلکه انتگرال را نیز تعریف می‌کند (دوب [[۱۲]) این سنت در اغلب کتب نظریهٔ احتمال باقی مانده است (به‌عنوان مثال رجوع شود به [۵]).

کلموگورف در تک‌نگاشت خود مطالب بسیار مهمی را مطرح کرد. او فضای احتمال، ساختن فرآیند تصادفی روی فضای بینهایت بعدی احتمال و امید شرطی نسبت به یک میدان سیگمایی را معرفی کرد. فهم قضیهٔ توسیع کلموگرف روی فضای بینهایت بعدی مدتها برای بسیاری از ریاضیدانها مشکل بود. جوزف دوب از بنیان‌گذاران احتمال در آمریکا می‌گوید:

«نویسنده به یاد می‌آورد که منظور کولموگروف از اندازه روی فضای تابعی را تا زمانی دراز پس از آنکه تک‌نگاشت وی را خوانده بود، در نمی‌یافته است» [۱۲].

این رویکرد مورد توجه و توافق اغلب احتمال‌دانها قرار گرفت. تا جایی که خیلی از احتمال‌دانها احتمال را جزیی از آنالیز می‌دانند. دوب می‌گوید «برخی ریاضیدانان بر آنند که هرگاه با خواص تحلیلی احتمال و امید ریاضی سر و کار داشته باشیم، موضوع بخشی از آنالیز است، ولی اگر با دنباله‌های نمونه‌ای و توابع نمونه‌ای سر و کار داشته باشیم، موضوع عبارت است از احتمال، نه آنالیز. این مؤلفان در موقعیت جالب توجهی هستند از این رو که در نظر کردن به تابع دو متغیرهٔ $(t,\omega) \to x(t,\omega)$ مثلاً در فرآیندهای تصادفی اگر خانوادهٔ توابع $x(t,.)$ هنگامی که t تغییر می‌کند مورد مطالعه باشد آن را آنالیز می‌خوانند، ولی اگر خانوادهٔ توابع $x(.,\omega)$ هنگامی که ω تغییر می‌کند مورد بررسی باشد آن را احتمال می‌نامند و قطعاً آنالیز به حساب نمی‌آورند. دقیقتر بگوییم، ایشان بحث پیرامون توزیعها و پرسشهای مربوطه را آنالیز می‌دانند، اما بحثهای به زبان توابع نمونه‌ای را آنالیز نمی‌دانند. این دیدگاه در قول ذیل بیان شده است.

پروتر: ایتو[1] در سال ۱۹۴۴، با ارائهٔ انتگرالش که در آن فرآیندهای تصادفی انتگرال بودند، توانست بخش چند بعدی را با تکنیکهای احتمالاتی محض مورد بررسی قرار دهد، که نسبت به روشهای آنالیز فلر بهتر است» [۱۲].

در هر حال دوب این ایده را که احتمال مستقل از آنالیز باشد قبول ندارد و در آخر این مقاله با آوردن استدلالی درباره توابع رادماچر[2]، و قضیهٔ پل لوی می‌نویسد:

«دیگر بر عهدهٔ خواننده است که داوری کند کدامیک از این نتایج نظریهٔ اندازه‌ای است و کدام یک احتمالاتی، و آیا اصلاً بیرون راندن احتمال ریاضی از قلمرو آنالیز فایده‌ای دارد، و اگر دارد، آیا نظریهٔ اندازه را هم نباید بیرون راند؟» [۱۲].

در مقابل رهیافت دوب، رهیافت دیگری است که به‌وسیله دیوید مامفرد مطرح می‌گردد که معتقد است که «رهیافت دیگر آن است که مفهوم «متغیر تصادفی» در مرکز توجه قرار بگیرد و همه کارها با انواع و اقسام دستکاری در متغیرهای تصادفی انجام شود.» مامفرد [۱۵].

دیوید مامفورد در مقالهٔ «طلوع عصر روشهای تصادفی» می‌خواهد ریاضی جدیدی به‌وجود آورد. او می‌نویسد «در رهیافت تقلیل‌گرا، متغیر تصادفی برحسب اندازه تعریف می‌شود که خود برحسب نظریهٔ اعداد حقیقی تعریف می‌شود، و این را هم نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف می‌کند که خودش بر اساس حساب محمولات تعریف می‌شود. در عوض من می‌خواهم بگویم که باید علی‌الاصول بتوان متغیرهای تصادفی را در مبانی منطق و ریاضیات ادغام کرد و به صورتبندی شفافتر و کاملتری از دیدگاه تصادفی رسید. من خودم هنوز صورتبندی کامل و قطعی از این قضیه ندارم».

در هر حال چه ما مانند «دوب» نظریهٔ احتمال را جزئی از آنالیز بدانیم چه مانند «دیوید مامفرد» قصد داشته باشیم ریاضی جدیدی با تغییر در مبانی آن به‌وجود آوریم و یا مانند پروتر بخشی را آنالیز و بخشی را احتمال بنامیم، این مسأله مسلم است که نظریهٔ احتمال کاملاً آغشته به آنالیز است و بر اساس آن توسعه یافته است حال چه بخواهد در درون آنالیز باقی بماند و چه از آن خارج شود. روشهای تصادفی دارای شهود ویژه خود است که در بقیهٔ قسمتهای آنالیز وجود ندارد. این شهود باعث مطرح شدن مسائل زیادی

1) Ito 2) Rademacher

در احتمال گشته و منبع گسترش آن است. در اغلب مسائل برای اثبات قضیه‌های احتمال از آنالیز کمک می‌گیریم. در این مقاله قصد داریم برای اثبات مسائل کلاسیک آنالیز از روشهای تصادفی کمک بگیریم و آنها را اثبات کنیم. بنابراین با نگاه یک احتمال دان به اشیاء آنالیز ریاضی می‌پردازیم.

نگاه احتمالاتی به آنالیز کلاسیک

بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ را در نظر بگیریم. می‌خواهیم به این بازهٔ دترمینیستیک با تعبیر احتمالی جان تازه‌ای بدمیم.

امیل بورل در سال ۱۹۰۹ هر $x \in [۰, ۱]$ را به‌صورت بسط دودوئی

$$x = ۰.x_۱, x_۲, \dots$$

نوشت که رقم x_j یا صفر است یا یک: این رقمها توابعی از x هستند. «اگر بازهٔ $[۰, ۱]$ را با اندازهٔ لبگ در نظر بگیریم که یک اندازهٔ احتمال بر این بازه است، این تابعها به شکل معجزه آسایی متغیرهایی تصادفی می‌شوند که دقیقاً همان توزیعهایی را دارند که در محاسبهٔ احتمالات پرتاب سکه به‌کار می‌روند. یعنی ۲^{-n} برابر است با احتمال منسوب به این رویداد که در یک آزمایش پرتاب سکه نخستین n پرتاب دنبالهٔ معینی از شیر و خط به دست بدهد، و ۲^{-n} همچنین طول کل (مساوی اندازهٔ لبگ) تعدادی متناهی بازه است که نقاط متعلق به آنها بسطهایی دودویی با دنباله‌ای مشخص از صفرها و یکها در n جایگاه خاص دارند.» (دوب [۱۲]). با این دید بازهٔ $[۰, ۱]$ فضای نمونه‌ای آزمایش برنولی است (رجوع شود به [۱]).

از بسط دودویی بالا و آزمایش برنولی یعنی پرتاب مستقل بینهایت بار سکه، می‌توان نشان داد که $\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}$ به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند. «ولی بیان قویتری از قانون اعداد بزرگ حکمی بود که بورل به‌دست آورد ـ طی یک برهان اشتباه و غیرقابل تصحیح ـ که این دنباله از میانگینها به ازای تقریباً هر x به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند (با احتمال ۱). یک سال بعد فیبر[1] برهان درستی برای این حکم ارائه کرد و از آن هنگام برهانهای بسیار ساده‌تری هم به دست آمده‌اند، [۱۳, ۵, ۴, ۳]. فرشه، حرمت بورل را نگه داشت: «برهان بورل بیش از حد کوتاه است. در آن چندین استدلال میانی حذف شده است و نیز احکامی بدون برهان فرض شده‌اند» [۱۲].

با استفاده از قضیهٔ قانون قوی اعداد بزرگ برای دنباله‌های برنولی می‌توان به اثبات سادهٔ برنشتین از قضیهٔ وایراشتراس برای تقریب توابع پیوسته با چند جمله‌ای‌ها دست یافت.

فرض کنیم $f = f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[۰, ۱]$ باشد. ثابت می‌کنیم f حد یکنواخت چندجمله‌ایهای برنیشتین به‌صورت زیر است:

$$B_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} f(k/n) C_n^k x^k (۱-x)^{n-k}$$

1) Faber

برهان. فرض کنیم $X_1, X_2, \dots, X_n$، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی (i.i.d.) برنولی با

$$P\{X_i = 1\} = x, \ P\{X_i = 0\} = 1 - x$$

باشد و $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، آنگاه

$$\begin{aligned} E(f(\tfrac{S_n}{n})) &= \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{S_n}{n}) P\{S_n = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(k/n) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_n(x). \end{aligned}$$

چون تابع f روی $[0, 1]$ پیوسته است، پیوستهٔ یکنواخت است و بنابراین برای هر $t > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد طوری که

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq t$$

اما تابع f پیوسته و درنتیجه کراندار است، در نتیجه یک M چنان وجود دارد که برای هر x

$$|f(x)| \leq M < \infty$$

با به‌کار بردن این نامساوی داریم

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= |\sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} f(k/n) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}| \\ &= |\sum_{k=0}^{n} (f(x) - f(k/n)) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(k/n)| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{\{k:|k/n-x|\leq\delta\}} |f(x) - f(k/n)| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{\{k:|k/n-x|>\delta\}} |f(x) - f(k/n)| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \epsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + 2M \sum_{\{k:|k/n-x|>\delta\}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

حال چون برای $n \geq 1$، $0 \leq k \leq n$، جرم احتمال در نقطهٔ k احتمال دوجمله‌ای زیر است:

$$P_n(k) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

بنابراین

$$\sum_{\{k:|k/n-x|>\delta\}} P_n(k) = P\{|\frac{S_n}{n} - x| > \delta\}$$

در نتیجه

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \epsilon + 2MP\{|\frac{S_n}{n} - x| > \delta\} \qquad (*)$$

اما چون برای هر متغیر تصادفی ξ داریم

$$P\{|\xi - E(\xi)| \geq \epsilon\} \leq \frac{V(\xi)}{\epsilon^2}$$

و در حالت $\xi = \frac{S_n}{n}$، $E(\xi) = x$ و

$$Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{Var(S_n)}{n^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}$$

بنابراین

$$P\{|\frac{S_n}{n} - x| > \delta\} \leq \frac{Var(\frac{S_n}{n})}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} |f(x) - B - n(x)| &\leq \epsilon + 2MP\{\tfrac{S_n}{n} - x| > \delta\} \\ &\leq \epsilon + 2M\tfrac{1}{4n\delta^2} \\ &= \epsilon + \tfrac{M}{2n\delta^2} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} |f(x) - B_n(x)| = 0$$

که نتیجهٔ قضیهٔ وایرشتراس است.

یکی از کاربردهای جالب احتمالات در آنالیز قضیهٔ (Szegö) است برای اثبات آن می‌توان به ([۱] صفحه ۱۶۷) رجوع کرد.

یکی از کاربردهای مهم احتمالات در آنالیز کلاسیک اثبات قضیهٔ رادن-نیکودیم به‌وسیله مارتینگل‌ها است. چون ما معمولاً احتمال و امید شرطی را به‌وسیله قضیهٔ رادن-نیکودیم تعریف می‌کنیم این نظریهٔ مارتینگل‌ها است که بر اساس این قضیه استوار می‌گردد. اما اثبات قضیهٔ رادن-نیکودیم به‌وسیله مارتینگل‌ها چندان هم غیرمنتظره نیست، برای دیدن این قضیه رجوع کنید به [۱۳].

آخرین مسألهٔ دترمینیستیک که ما می‌خواهیم در این مقاله به آن بپردازیم مسألهٔ دیریشله است. این مسأله یکی از مسأله‌های مهم نظریهٔ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی است و نظریهٔ پتانسیل دیریشله به‌حساب می‌آید.

مسألهٔ دیریشله

فرض کنیم D یک میدان در $\mathbb{R}^n$ باشد. فرض کنیم تابع f روی مرز D تعریف شده باشد می‌خواهیم ثابت کنیم یک تابع هارمونیک u روی میدان D چنان موجود است که $u|_{\partial D} = f$.

اثبات وجود این مسأله با روش‌های دترمینیستیک پیچیده است و تنها وجود جواب را می‌توان ثابت کرد. در صورتی که در راه‌حل احتمالاتی که ارائه می‌دهیم نه تنها وجود جواب را ثابت می‌کنیم بلکه فرمولی برای جواب نیز ارائه می‌دهیم. اثبات با روشهای احتمالاتی این قضیه بر اساس آنالیز تصادفی و خواص حرکت برونی است. در بند بعد ما به‌طور شهودی و توصیفی درباره حرکت برونی و خواص آن صحبت می‌کنیم و سپس مسألهٔ دیریشله را ثابت می‌کنیم. برای مطالعه عمیق حرکت برونی و خواص آن رجوع کنید به [۷, ۱۰].

حرکت برونی و مسألهٔ دیریشله

حرکت برونی نامی است که به حرکت نامنظم گردهٔ گیاهان که در آب معلق هستند داده شده است. رابرت براون گیاه‌شناس معروف انگلیسی برای اولین بار در ۱۸۲۸ با مشاهدهٔ این حرکت، متوجه اهمیت آن در مطالعهٔ ذرات معلق میکروسکوپی شد. پس از آن دامنهٔ کاربرد حرکت برونی از مطالعهٔ ذرات معلق میکروسکوپی بسیار فراتر رفته است و شامل مدل‌سازی قیمتهای سهام، نوفهٔ حرارتی در مدارهای الکتریکی، برخی حالتهای حدی در سیستمهای صف و موجودی و اختلالات تصادفی در انواع دیگر از سیستمهای فیزیکی، زیستی، اقتصادی و مدیریت شده است.

آنچه براون در ابتدا مشاهده نمود این بود که گرده‌های گیاهان درون مایع دارای حرکت‌اند و علاقه‌مند شد تا قانون و علت این حرکت را بیابد، اما از عهده این کار برنیامد و مسأله بدون پاسخ باقی ماند. سپس در سال ۱۹۰۶ میلادی، اینشتین موفق به حل مسأله شد و علت حرکت را بمباران دانه‌های گرده توسط ملکولهای مایع معرفی نمود. با این حال اولین مدل ریاضی حرکت برونی در تز دکتری ریاضی بشلیه[1] در سال ۱۹۰۰ میلادی در دانشگاه پاریس و برای مدل اقتصادی مطرح شد.

بشلیه توزیع‌های مهم متعددی استخراج کرده بود که همگی به فرآیند حرکت براونی در $\mathbb{R}$ مربوط بودند، «از جمله توزیع مربوط به تغییر بیشینه در طول یک بازهٔ زمانی. بدین منظور وی توزیعهای متناظر با یک قدم زدن تصادفی گسسته را پیدا می‌کرد و سپس حد را هنگامی که طول قدمها به سمت صفر میل می‌کرد به‌دست می‌آورد. دقیقتر بگویم، آنچه بشلیه استخراج نمود توزیعهایی بودند که برای فرآیند حرکت برونی کارایی داشتند، به فرض آنکه اصلاً چیزی تحت عنوان حرکت برونی وجود داشته باشد، و به فرض اینکه بشود آن را با آن قدم زدنهای تصادفی تقریب زد.» [۱۲]

پس از آن نوربرت وینر ریاضیدان برجسته و نابغهٔ قرن بیستم در سال ۱۹۱۸ مدل ریاضی این حرکت را به‌طور کامل بررسی کرد. «توجه کنید که شکی در وجود حرکت برونی نیست: حرکت برونی را می‌شود زیر میکروسکوپ نظاره کرد. ولی هنوز برهانی برای وجود یک فرآیند تصادفی، یک حساب ریاضی، با خواص مطلوب در دست نبود. وینر (۱۹۲۳) فرآیند مطلوب حرکت برونی را که امروزه گاه فرآیند وینر نامیده می‌شود ساخت. بدین منظور وی از رهیافت دانیل به نظریهٔ اندازه استفاده کرد تا اندازه‌ای با خواص ذیل

1) Bachelier

برفضای S از توابع پیوسته به دست آورد: اگر $X(t,.)$ متغیری تصادفی باشد که با مقدار یک تابع در S در زمان t تعریف شده باشد، فرآیند تصادفی این متغیرهای تصادفی فرآیندی تصادفی است با اعضای S به‌عنوان توابع نمونه‌ای، و با توزیعهای توأمی که برای فرآیند حرکت برونی داشتیم به‌عنوان توزیعهای توأم متغیر تصادفی» [۱۲]

ریاضیدانان زحمت برای تولید یک نظریهٔ عمیق ریاضی می‌کشند اما متأسفانه آنچه باقی می‌ماند نتیجهٔ این نظریه به صورت یک مقاله است، همانطور که ۷۵ ریاضیدان در سال ۱۹۶۲ در بیانیه‌ای در مورد تدریس ریاضی اعلام کردند: «تفکر ریاضی تنها استدلال استنتاجی نیست، همچنین اثبات صورت صرف هم نمی‌باشد. فرآیندهای ذهنی و فکری که اثبات و چگونگی اثبات را ارائه می‌کنند همانند خود اثبات که نتیجهٔ تفکر ریاضی است بخشی از تفکر ریاضی محسوب می‌شود. استخراج مفاهیم درست از وضعیت‌های محسوس و ملموس، تعمیم از حالات شهود، استدلال استقرایی، استدلال از طریق تمثیل، زمینه‌های شهودی که برای آشکارکردن یک حدسیه به کار می‌روند همگی سبک و طریقه ریاضی گونهٔ تفکر است.» [۱۲] خوشبختانه نوربرت وینر با نوشتن کتابهای توصیفی مانند «من یک ریاضیدان هستم» پشت پردهٔ تفکر و فرآیند به‌وجود آوردن یک نظریه را تا اندازه‌ای بررسی کرده است، بنابراین داستان حرکت برونی را از زبان نوربرت وینر می‌شنویم. وینر در .M.I.T استخدام شده بود: «ساختمان .M.I.T در ساحل رودخانهٔ چارلز ساخته شده بود و طوری قرار داشت که می‌شد مستقیماً از پنجره‌های آن، از چشم‌اندازگستردهٔ سرزمین زیبای دور و برِ آن لذت برد، به‌خصوص وجود رودخانه، موجب شادی بود. به‌نظر می‌رسید که می‌توان از بام تا شام به تماشای ناز و کرشمه‌های عجیب و غریب آب نشست. ولی آن چه در میان این همه زیبایی مرا به طرف خود می‌کشید، ریاضیات و فیزیک بود. آن قانون‌مندی‌های ریاضی، که همه این تودهٔ بی‌نظم و ناآرام آب را هدایت می‌کند، کدام است؟ مگر اهمیت اصلی ریاضیات در این نیست که می‌تواند نظم و ترتیبی را که زیر این هرج و مرج و نابسامانی ظاهر دور و بر ما پنهان شده است، پیدا کند؟ رودخانهٔ چارلز، گاهی ناگهان از موج‌های بلند، با شانه‌های بلندکف، پوشیده می‌شود و گاه چنان چین خوردگی ملایمی دارد که به زحمت می‌توان موج‌های کوتاه آن را دید. طول موج‌های آن، گاه از دو یا سه بند انگشت تجاوز نمی‌کند و گاه به چند متر می‌رسد. چگونه می‌توان بیان ریاضی همهٔ این پدیده‌ها را داد؟ از چه دستگاهی باید استفاده کنیم تا در تنوع بی‌پایان جزئیات این منظره غرق شویم؟ برایم روشن بود که این مسئله، با مسألهٔ میانگین آماری بستگی دارد که با انتگرال لبگ خویشاوند است.» ([۱۶] صفحهٔ ۴۱).

وینر در کتاب خود به آشنایی با آثار ویلارد گیبس، اشاره می‌کند: «یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان آمریکایی است که در واقع رشتهٔ تازه‌ای از دانش را پایه گذاشت، رشته‌ای که در حد فاصل فیزیک و ریاضیات قرار دارد» ([۱۶] صفحه ۴۲). «گیبس آثار بسیار جالبی هم در فیزیک و هم در ریاضیات دارد، ولی کارهای اساسی او در زمینهٔ مکانیک آماری، بیش از هر چیز دیگری برایم جالب بود، همین کارهای او بود که، تا حد زیادی، مسیر خاص زندگی مرا مشخص کرد.»

دیدگاه سنتی در فیزیک، که از نیوتون بزرگ سرچشمه می‌گیرد، بستگی خلل‌ناپذیری با تصورهای

دترمینیستیکی دارد و، بر طبق آن، معرفت دقیق چگونگی جهان و یا هر قسمت بسته‌ای از آن در یک لحظهٔ معین، شامل معرفت دقیق آن در زمان‌های بعدی هم می‌باشد. بنابر تصور اصلی نیوتون، اگر موقعیت و سرعت ذره‌ها را در موج‌های سطح رودخانهٔ چارلز بدانیم، می‌توان حرکت این موج‌ها را در همهٔ سده‌های آینده محاسبه کرد. متأسفانه با وسیله‌های اندازه‌گیری که در اختیار داریم، و همهٔ آن با دستهای آدمی ساخته شده‌اند، نمی‌توانیم مقادیر مطلقاً دقیق و سرعت همهٔ ذرّه‌ها را، در لحظهٔ اولین زمان، به‌دست آوریم. به این ترتیب، فیزیک، که باید عملاً به درد پدیده‌های طبیعت بخورد، ناگزیر مواجه با مشکلی می‌شود: چگونه می‌توان با تکیه بر این داده‌های تقریبی مربوط به وضع اولیه، که به کمک وسیله‌های موجود به دست می‌آیند، دربارهٔ واقع امر قضاوت کرد؟» ([۱۶] صفحه ۴۳).

با این ایده وینر فضای نمونه‌ای را فضای توابع پیوسته یا در واقع فضایی که هر عضو آن یک موج باشد در نظر گرفت. متغیر تصادفی از فضای توابع پیوسته $\Omega = C[\circ, T]$ به اعداد حقیقی تعریف شده بود. دراینجا وینر مفهوم مهمی را کشف کرده بود، توابعی که روی فضایی تعریف می‌شوند که دامنهٔ آن نقطه (در فضای چندبعدی) نیست بلکه دامنهٔ آن یک فضای بینهایت بعدی است. خود می‌گوید «به تعمیم مفهوم احتمال، در مواردی مربوط می‌شود که «حالت‌های ممکن» را نمی‌توان به‌صورت نقطه‌های یک صفحه یا حوزه‌ای از فضا در نظر گفت، ولی خصلت منحنی‌هایی را دارند که معرف اشیای متحرکی هستند.» ([۱۶] صفحه ۴۴).

به این ترتیب، حرکت برونی موقعیتی را در برابر ما قرار می‌دهد که در آن، ذره‌ها به رسم منحنی‌هایی مشغول‌اند، و این منحنی‌ها، به مجموعه‌ای آماری از منحنی‌ها تعلق دارند. «این حرکت، بهترین زمینه برای اندیشه‌های من در مورد به‌کار بردن انتگرال‌گیری لبگ در فضای منحنی‌ها بود. و ضمناً دارای این خصوصیت بود که موضوع آن، از لحاظ فیزیکی، به دنیای واقع مربوط می‌شد و دقیقاً به اندیشه‌های گیبس بستگی داشت. در واقع، در این جا بود که توانستم با به‌کار بردن نظرات خود در تعمیم نظریهٔ انتگرال‌گیری، به موفقیت بزرگی برسم. خود حرکت برونی، موضوعی نبود که در فیزیک، بدون بررسی باقی مانده باشد. ولی در کارهای اساسی و عمیقی که اینشتین و سمولوخوفسکی در این زمینه کرده‌اند، یا به رفتار یک ذره در یک لحظهٔ زمانی ثابت پرداخته‌اند و یا به خصلت‌های آماری مجموعهٔ بزرگی از ذره‌ها در جریان زمان: ولی خاصیت‌های ریاضی خط سیر ذره‌های جداگانه، هیچ‌گاه مورد مطالعه قرار نگرفته بود.» در مورد موضوع اخیر، تقریباً هیچ چیز روشن نبود، البته اگر اظهار نظر عمیق یه رن فیزیک دان فرانسوی، را که در کتاب خود به‌نام «اتم‌ها» آورده است، به‌حساب نیاوریم. او می‌گوید: «خط سیر به‌کلی بی‌نظم ذره‌ها، که در اثر حرکت برونی به وجود می‌آید، آدمی را به یاد منحنی‌های پیوستهٔ ریاضی دانان می‌اندازد که در هیچ نقطهٔ خود مشتق نداشته باشند» ([۲۶]، صفحه ۴۸ و ۴۹).

«با کمال تعجب، و در عین حال لذت، دریافتم که با چنین درکی از حرکت برونی، می‌توان نظریهٔ صوری آن را در حد بالایی از کمال و ظرافت تنظیم کرد. در چارچوب این نظریه توانستم ملاحظهٔ یه‌رن را ثابت کنم که، به استثنای چند موردی که احتمال آن در مجموع برابر صفر است، مسیرهای حرکت برونی،

منحنی‌های پیوسته‌ای هستند که در هیچ جا مشتق ندارند» ([۱۶] صفحه ۴۹).

بدین ترتیب وینر در سال (۱۹۲۳) از خاصیت گاوسی بودن حرکت برونی استفاده می‌کند و حرکت برونی را به‌صورت یک سری (فوریه) با پایهٔ دنباله‌های توابع شاودر، و ضرایب متغیرهای تصادفی گوسی می‌سازد. حرکت برونی بعدها با اصلاحاتی به‌وسیله پل‌لوی در سال (۱۹۴۸) و چیشلسکی (۱۹۶۱) به‌صورت ساده تری ساخته می‌شود (برای این روش رجوع کنید به لامپرتی [۸]). حرکت برونی یک فرآیند تصادفی است که دارای خاصیت مارکفی، گوسی، مارتینگلی، با نموهای ایستا و مستقل است. دارای مسیرهای پیوسته‌ای است که در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

حال به حل مسألهٔ دیریشله می‌پردازیم. با توجه به این واقعیت که حرکت برونی دارای خاصیت قوی مارکف نیز می‌باشد، یعنی اگر B_t یک حرکت برونی و T یک زمان توقف باشد آنگاه فرآیند جدید $B_{T+t} - B_T$ یک حرکت برونی جدید است. حرکت برونی یک مارتینگل موضعی است یعنی اگر T یک زمان توقف باشد آنگاه $B_{T\wedge t}$ (که در اینجا $T \wedge t$ می‌نیمم t و T است) یک مارتینگل است.

فرض کنیم D یک مجموعهٔ فشردهٔ نسبی باشد، یعنی $\bar{D}$ فشرده باشد. قرار می‌دهیم

$$\tau_D = \inf\{t : B_t \in D^c\}$$

یعنی زمان برخورد حرکت برونی با مرز مجموعهٔ D یا اولین زمانی که حرکت برونی می‌خواهد از مجموعهٔ D خارج شود. می‌توان ثابت کرد که τ_D یک زمان توقف است، توجه شود که τ_D متناهی است. یعنی حرکت برونی با احتمال ۱ از مجموعهٔ D خارج می‌شود. اگر f تابعی باشد که روی D تعریف شده است آنگاه $f(B_t)$ فقط برای $t < \tau_D$ تعریف شده است.

قضیه: فرض کنیم f یک تابع هارمونیک در D باشد (یعنی $\triangle f = ۰$ در D) و فرض کنیم $B_۰ = x \in D$ (یعنی حرکت برونی در لحظه صفر در نقطه x باشد). آنگاه $f(B_t)$ یک مارتینگل موضعی است.

برهان: با استفاده از آنالیز تصادفی و فرمول ایتو [۷, ۹, ۱۰, ۱۴] داریم

$$\begin{aligned} f(B_t) = f(x) &+ \int_۰^t \nabla f(B_s) dB_s \\ &+ \tfrac{۱}{۲} \int_۰^t \triangle f(B_s) ds \end{aligned}$$

چون f هارمونیک است، $\triangle f = ۰$ و از آنجا

$$f(B_t) = f(x) + \int_۰^t \nabla f(B_s) dB_s$$

چون انتگرال تصادفی یک مارتینگل است، نتیجه برقرار است .

قضیه (مسألهٔ دیریشله)

فرض کنیم D یک میدان باشد که در آن برای تمام xها

$$P^x(\tau_D < +\infty) = ۱$$

و گیریم f یک تابع مثبت برل اندازه‌پذیر باشد. تابع $h(x) := E^x(f(B_{\tau_D}))$ را در نظر می‌گیریم، اگر x موجود باشد که $h(x) < +\infty$ آنگاه h روی D هارمونیک است.

تبصرهٔ ۱. توجه کنید P^x و E^x، احتمال و امید شرطی به شرط $\{B_\circ = x\}$ (یعنی حرکت برونی در لحظهٔ صفر در نقطه x) باشد.

تبصرهٔ ۲. در اینجا فرمول صریح $h(x) := E^x(f(B_{\tau_D}))$ حل مسألهٔ دیریشله را به ما می‌دهد.

برهان. گیریم $x \in D$ و گیریم V گویی به مرکز x باشد که $\bar{V} \subset D$ قرار می‌دهیم

$$\tau_v = \inf\{t : B_t \in \partial V\}$$

اگر $x = B_\circ$، آنگاه $\tau_v < \tau_D$. لذا

$$\begin{aligned} E^x(f(B_{\tau_D})) &= E^x(E(f(B_{\tau_D})|\mathcal{F}_{\tau_v})) \\ &= E^x(E(f(B_{\tau_D})|B_{\tau_v})). \\ &= h(B_{\tau_v}) \end{aligned}$$

بنابراین $h(x) = E^x(h(B_{\tau_v}))$. اما حرکت برونی نسبت به دوران ناوردا است، لذا B_{τ_v} روی ∂V یکنواخت است. حال

$$h(x) = \frac{۱}{|\partial V|}\int_{\partial V} h(y)dy$$

در نتیجه برای هر گوی به مرکز x که در D واقع شود، اگر h متناهی یا نامتناهی باشد

$$h(x) = \frac{۱}{|V|}\int_V h(y)dy$$

پس $h(x)$ متناهی است اگر و فقط اگر h در یک همسایگی x متناهی باشد، که نشان می‌دهد مجموعهٔ $\{x : h(x) < +\infty\}$ باز است. از همبند بودن D نتیجه می‌شود که اگر یک x در D موجود باشد که $h(x) < +\infty$، آنگاه برای هر x، $h(x) < +\infty$، لذا h هارمونیک است.

مراجع

[1] Adams, M., Guiliemin, V., *Measure Theory and Probability.*

[2] Bass, R.F. ,*Probabilistic Techniques in Analysis*, Springer-Verlag 1995.

[3] Billingsley, P., *Probability and Measure*, New York: Wiley.

[4] Brelman,*Probability*, Siam 1992.

[5] Chung, K.L., *A Course in Probability Theory*, Acadamic Press, 1977.

[6] Kac, M., "Statistical Independence in Probability", Analysis and Number Theory. Mathematical Association of America (Carus Mathematical Monograph, no 12) 1959.

[7] Karatzas, Shreve E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus* Springer-Verlag New York 1988.

[8] Lamperli, J., *probability* W.A. Benjamin Inc 1966.

[9] Ksendal, B., *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.

[10] Revuz, D., Yor, M., *Continuous Martingales and Brownlan Motion*, Springer Berlin 1992.

[۱۱] در باب برنامه‌ریزی درسی دبیرستان، ترجمه جواد حاجی‌بابایی، رشد آموزش ریاضی شماره ۴۶، ۱۳۷۴.

[۱۲] دوب، جوزف (ترجمه عطاءالله تقاء) «سیر پیدایش دقت در احتمال ریاضی» (۱۹۰۰ـ۱۹۵۰)، نشر ریاضی، سال ۱۲، شماره ۱ و ۲.

[۱۳] ظهوری زنگنه، بیژن، نظریهٔ فرآیندهای تصادفی، جزوات درسی، دانشگاه صنعتی شریف.

[۱۴] ظهوری زنگنه، بیژن، آنالیز تصادفی، جزوات درسی، دانشگاه صنعتی شریف.

[۱۵] مامفرد، دیوید، ترجمه شاپور اعتماد، طلوع عصر روشهای تصادفی، نشر ریاضی سال ۱۳، شماره ۱.

[۱۶] وینر، نوربرت، ترجمهٔ پرویز شهریاری،من یک ریاضیدانم، انتشارات فاطمی، خرداد ۱۳۶۸.

بیژن ظهوری زنگنه

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

پست الکترونیک: zangeneh@sina.sharif.edu