**فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی**
شمارهٔ ۲۸ (بهار ۱۳۸۱)، صص. ۲۷ تا ۳۹

# فضاهای کوانتمی و توپولوژی ناجابجایی آنها

ج. کونتز

هندسهٔ ناجابجایی هندسهٔ «فضاهای کوانتمی» را مطالعه می‌کند، به عبارت ساده‌تر، این کار به معنی مطالعهٔ «خواص هندسی» جبرهای ناجابجایی (به عنوان مثال روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$) است. چنین جبرهایی به عنوان مثال شامل جبرهای زیر هستند:

- جبرهای عملگرهای شبه دیفرانسیل، جبرهای عملگرهای برگ‌وار دیفرانسیل بر خمینه‌های برگ‌بندی شده، جبرهای فرم‌های دیفرانسیل، گروه جبرها یا جبرهای پیچشی برای گروهوارها.
- صورت‌های ناجابجایی یا «کوانتیدهٔ» جبرهای مشهور مانند جبرهای نگاشت‌ها بر کره‌ها، یا بر چنبره‌ها، بر مجتمع‌های سادکی یا بر فضاهای رده‌بندی؛
- جبرهای واقعاً ناجابجایی جدید مانند جبرهای ناشی شده از مکانیک کوانتمی.

اساس کار بر توجه به این نکته است که رسته‌های مختلفی از فضاها را می‌توان به وسیلهٔ جبرهای (جابجایی) نگاشت‌ها بر آنها کاملاً توصیف کرد (یک فضای موضعاً فشرده به‌وسیله جبر نگاشت‌های پیوسته، یک خمینه هموار به وسیلهٔ جبر نگاشت‌های هموار، یک واریتهٔ جبری آفین به وسیله حلقهٔ مختصاتی‌اش). در این صورت، به یک جبر جابجایی می‌توان به عنوان جبر نگاشت‌ها بر یک «فضای ناجابجایی» نگریست. این رویکرد بسیار انعطاف‌پذیر است، مثلاً این دیدگاه جبر نگاشت‌ها بر یک خمینه، جبر عملگرهای شبه دیفرانسیل و جبر فرمهای دیفرانسیل را به‌طور یکسان پوشش می‌دهد.

حال سؤال این است: خاصیت «هندسی» یک جبر ناجابجایی چیست؟ چگونه می‌توان کلاسهای مشخصه یا ساختارهای اضافی مانند متریک ریمانی را برای یک جبر ناجابجایی توصیف کرد؟ این‌گونه سؤال‌ها مطالبی است که هندسه ناجابجایی دربارهٔ آنها بحث می‌کند. کتاب بسیار جذاب اَلَن کنز [۵] را ببینید.

دو «ابزار» بنیادی هندسهٔ ناجابجایی عبارت‌اند از مانستگی دوری و $K$ـتئوری توپولوژیک دو متغیره.

نظریهٔ دوری را می‌توان به عنوان تعمیمی از همانستگی دُرام[1] کلاسیک، با نتایج پر دامنه، درنظر گرفت. درحالی‌که $K$ـتئوری، $K$ـتئوری توپولوژیک دو متغیرهٔ اَتیاـهرزبروخ را به عنوان یک حالت خیلی خاص شامل می‌شود. $K$ـتئوری دو متغیره ابتدا به وسیله کاسپاروف بر روی رستهٔ $C^*$ـجبرها تعریف شد و توسعه یافت، از این طریق کارهای قبلی اَتیاـهرزبروخ، براون‌ـ دوگلاس ـفیلمُر و دیگران وحدت یافت و به صورت بنیادین گسترش داده شد. کاسپاروف همچنین نظریهٔ دو متغیرهٔ خود را به‌کار برد و نتایج مثبت حیرت‌آوری دربارهٔ حدس نوویکف به‌دست آورد. همین اواخر کشف شد که $K$ـتئوری‌های توپولوژیک دومتغیره می‌تواند بر طیف گسترده‌ای از جبرهای توپولوژیک شامل جبرهای گسسته و جبرهای موضعاً محدب و جبرهای باناخ یا $C^*$ـجبرها تعریف شود.

نظریهٔ دوری یک نظریهٔ مانستگی است که مستقلاً توسط کنز و تسیگان توسعه یافت، که هر یک متأثر از جنبه‌های مختلف ساختارهای $K$ـتئوری بودند. پس از آن فوراً مشخص شد که مانستگی دوری ارتباط‌های نزدیکی با نظریه درام، مانستگی جبر لی، همانستگی گروه و فضایای اندیس دارد.

قابل توجه است که نظریه‌های جدید به هیچ وجه تعمیم سادهٔ ساختارهای کلاسیک نیستند. درواقع، در حالت جابجایی، دیدگاهی جدید و تعبیری کاملاً بدیع از نظریه‌های مشهور کلاسیک ارائه می‌دهند. خاصیت‌های اساسی این دو نظریه فقط در رستهٔ ناجابجایی قابل مشاهده است. مثلاً هر دو نظریه در این زمینه تعدادی خاصیت شمول دارند.

در اینجا نگاهی داریم به نوع اطلاعات هندسی که این دو نظریه برای تعدادی از «فضاهای کوانتمی» ساده ارائه می‌دهند. تعریف رسمی کلاس‌های دوری و $K$ـتئوری که در این مثال‌ها ذکر شده است در بخش بعدی توضیح داده می‌شود. در اینجا برای ایجاد یک درک شهودی نیازی به تعریف دقیق نیست.

۱. **فضاهای با $n$ نقطه و پیوندهای ناجابجایی.** این فضا دارای $n$ نقطه و پیکان‌هایی بین هر دو نقطه است. به عنوان یک جبر، این فضا به وسیلهٔ جبر $M_n(\mathbb{C})$ متشکل از ماتریس‌های $n \times n$ توصیف می‌شود. (تابع‌های روی $n$ نقطه متناظر با ماتریس‌های قطری‌اند).

نظریهٔ دوری و $K$ـتئوری، هر دو به یک ردهٔ زوج مانستگی نظر می‌کنند، و رده‌های فرد را در نظر

1) de Rham

نمی‌گیرند. در هر دو نظریه، ردهٔ زوج نابدیهی صفربُعدی است و هیچ ردهٔ همانستگی نابدیهی با بُعد بالاتر وجود ندارد. از آنجا که یک رده وجود دارد که نمایانگر ردهٔ هم‌ارزی $n$ نقطه است و هیچ رده‌ای از بعد بالاتر وجود ندارد، $M_n(\mathbb{C})$ شبیه یک فضای صفربعدی همبند است.

این ساده‌ترین حالتِ یک جبر پیچشی برای یک گروهوار است. در حالت کلی، یک گروهوار (توپولوژیک) عبارت است از یک فضای اشیاء و خانواده‌ای از پیکان‌های (برگشت‌پذیر) که می‌تواند مانند مثال بالا به عنوان مسیرهایی ناجابجایی بین اشیاء در نظرگرفته شود. از دیدگاه نظریه‌های مانستگی ناجابجایی، نقاط مختلفی که توسط یک پیکان به هم وصل شده‌اند از یک ردهٔ مانستگی هستند. رده‌های مانستگی بالاتر نیز می‌تواند از پیکربندیهایی از پیکان‌ها (مانند طوقه‌ای از پیکان‌ها)، از پیکربندیهای متشکل از پیکان‌ها و اشیاء، یا حتی از ترکیب‌های خطی چنین چیزهایی ناشی شود. به عنوان مثال، جبر تعیین شده توسط ترکیب‌های خطی همه مسیرهای ممکن در گراف زیر را در نظر گیرید. این جبر، علاوه بر ردهٔ $0$ـبعدی داده شده توسط ردهٔ هم‌ارزی نقاط، یک ردهٔ یک‌بعدی ناشی از مسیر روی دایره را نیز در بر دارد (برعکس حالت $M_n(\mathbb{C})$، در اینجا فرض می‌کنیم این مسیر مخالف مسیر بدیهی است).

**۲. فضای فاز در مکانیک کوانتمی.** این فضا توسط جبر یکه‌دار $A(p,q)$ توصیف می‌شود. $A(p,q)$با دو مولد $p,q$ که در رابطهٔ هایزنبرگ $pq-qp=۱$ صدق می‌کنند، تولید می‌شود. (گاهی این جبر،جبر ویل[1] نامیده می‌شود). در حال حاضر هیچ محاسبه‌ای از $K$ـتئوری برای این جبر (یا تکمیل شدهٔ هموار آن) وجود ندارد. از دیدگاه نظریهٔ دوری یک رده همانستگی ۲ـبعدی وجود دارد و هیچ ردهٔ (نابدیهی) در بعدهای مخالف دو وجود ندارد. در این صورت ما یک فضای ناجابجایی ۲ـبعدی داریم (فرضاً شبیه یک صفحهٔ ۲ـبعدی). باوجوداین، نه تنها این فضا هیچ نقطه‌ای ندارد، بلکه حتی هیچ ردهٔ

1) Weyl algebra

هم‌ارزی یک نقطه را نیز ندارد.

۳. **چنبرهٔ ۲ـبعدی ناجابجایی.** این فضا عبارت است از جبر یکه‌دار $A_\theta$ داده شده توسط سریهای توانی با ضرایب سریعاً نزولی در دو مولد $u$ و $v$ که در رابطه‌های $uu^* = u^*u = vv^* = v^*v = 1$ و $vu = e^{2\pi i\theta}$ برای یک $\theta \in [0, 1]$ صدق می‌کنند. هر زوج مولدهای $\{u, u^*\}$ و $\{v, u^*\}$ یک زیرجبر جابجایی یکریخت با جبر نگاشت‌های هموار بر دایره، تولید می‌کند. اگر $\theta = 0$، آنگاه این زیرجبرها جابجا می‌شوند و $A_\theta$ با جبر نگاشت‌های هموار بر چنبرهٔ ۲ـبعدی $S^1 \times S^1$ یکریخت است. $K$ـتئوری برای جبر $A_\theta$ دو ردهٔ زوج‌ـبُعدی و دو ردهٔ فردـبُعدی را در بر دارد.

نظریهٔ دوری با دقت بیشتری نشان می‌دهد که یکی از رده‌های زوج $0$ـبعدی و دیگری ۲ـبعدی است. دو رده فرد هر دو یکـبعدی‌اند (و توسط ۱ـفرم‌های $u^{-1}du$ و $v^{-1}dv$ نمایش داده می‌شوند). بنابراین، از این دیدگاه، چنبرهٔ ناجابجایی دقیقاً شبیه چنبرهٔ معمولی ۲ـبعدی است.

۴. **مجتمع‌های سادکی ناجابجایی.** فرض کنید $\Sigma$ یک مجتمع سادکی متناهی باشد که توسط

مجموعهٔ رأسهایش $V$ و مجموعه سادکهایش که عبارت است از زیرمجموعه‌های متناهی $F \subset V$، داده شده است. می‌توانیم به $\Sigma$ یک جبر ناجابجایی $C_\Sigma$ به صورت زیر متناظر کنیم. فرض کنید $C_\Sigma$ جبر یکدار داده شده توسط سریهای توانی با ضرایب سریعاً نزولی در مولدهای $h_s(S \in V)$ باشد که در روابط زیر صدق می‌کنند:

- $\Sigma_{S\in V} h_s = ۱$ ؛
- اگر $\{S_۰, S_۱, \ldots, S_n\}$ در $\Sigma$ نباشد، آنگاه حاصلضرب $h_s.h_{s_۱}\ldots h_{s_n}$ صفر است.

(توجه کنید که هنگامی‌که ما شرط اضافی جابجایی مولدها را معرفی می‌کنیم یک جبر یکریخت با جبر نگاشت‌های هموار بر تعبیر هندسی $\Sigma$ را به دست می‌آوریم). $K$ـتئوری و مانستگی دوری متناوب برای $C_\Sigma$ به ترتیب یکریخت با $K$ـتئوری و همانستگی تکین $\mathbb{Z}_۲$ـمدرج تعبیر هندسی $\Sigma$ است. با این حال، بُعد یک رده همانستگی دوری برای $C_\Sigma$، خیلی بزرگتر از بعد $(d)$ ردهٔ مانستگی جابجایی نظیر آن (که از مرتبهٔ $۳^d$ است) می‌باشد. همچنین یک پالایش درجه‌ای روی $K$ـمانستگی جبرهای موضعاً محدب وجود دارد. درجهٔ $K$ـمانستگی یک ردهٔ $K$ـمانستگی برای $C_\Sigma$ با بعد ردهٔ مانستگی جابجایی نظیرش برابر است.

در این مثال‌ها رده‌های دوری و $K$ـتئوری برای توصیف «شکل» یک فضای ناجابجایی به کار رفته است. اما کارکردِ این ناورداهابه اینجا ختم نمی‌شود. آنها همچنین ابزار اصلی هستند که برای توصیف اطلاعات توپولوژیکی دیگر مانند داده‌های چسبان در توسیع‌ها و اندیس عملگرها به کار می‌روند.

در این مقاله ما دیدگاهی یکنواخت از نظریهٔ دوری و نظریهٔ ناوردای دو طرفهٔ $K$ـتئوری را ارائه می‌کنیم که در حقیقت می‌تواند در رسته‌های مختلف جبرها قابل اعمال باشد. این دیدگاه بر شباهت بین نظریهٔ دوری با نظریهٔ دُرام و رابطهٔ بین $K$ـتئوری و توسیع‌ها تأکید می‌کند. این دیدگاه به طور طبیعی به خواص بنیادی در دو نظریه منتج می‌شود. ما همچنین ساختار شاخص دو متغیرهٔ چرن‌ـکُنز[1] را که از $K$ـتئوری دومتغیره به نظریهٔ دومتغیره دوری گذر می‌کند، توضیح می‌دهیم. وجود این تبدیل ضربی با این کلیت

1) Chern-Connes

فقط در همین سالهای اخیر در نتیجهٔ پیشرفت در نظریه‌های $K$ و مانستگی دوری به دست آمده است، [۹],[۶ ](حالت‌های مهم خاص توسط کنز و دیگران بررسی شده بود، [۱۲],[۴]). این تعمیمی وسیع از شاخص کلاسیک چرن در هندسه دیفرانسیل است و اجازه می‌دهد که کلاس‌های مشخصه را بتوان با اشیاء $K$ـتئوری متناظر کرد.

من برای تصاویر مثال‌های بالا به پسرانم نیکلاس و میکائیل مدیونم. زیرا این تصویرها هیچ معنی تکنیکی ندارند، و هدف آنها فقط نوعی تجسّم فضاهای کوانتمی وابسته است.

**همبافت درام ناجابجایی- یا چگونه از یک فضای کوانتمی اطلاعات جابجایی استخراج کنیم**

هر جبر ناجابجایی $A$ با عمل خارج قسمت گرفتن نسبت به ایده‌آل تولیدشده توسط همه جابجاگرها می‌تواند تعویض‌پذیر شود. با این حال این روش، اطلاعات مربوط را تقریباً در همه حالت‌های جالب از بین می‌برد. در حقیقت، خارج قسمت آبلی نوعاً صفر است (مثلاً در مثال‌های ۱ و ۲ و ۳ قبلی وضع چنین است).

یک رویکرد نویدبخش عبارت است از تقسیم جبر فقط بر فضای خطی جابجاگرها، یا به طور دوگان، بررسی اثرها بر $A$. یک اثر[1] به موجب تعریف عبارت است از یک تابعک خطی $f$ بر $A$ چنانکه $f(xy) = f(yx)$ برای هر $x, y \in A$.

در این صورت، استراتژی ما برای توصیف اطلاعات توپولوژیکی عبارت است از بررسی رده‌های هموتوپی اثرها. هموتوپی برای اثرها چیست و چگونه می‌تواند به صورت جبری فرموله شود؟

یک جواب به وسیله $X$ـهمبافتی که توسط کویلن [۱۴]، در ارتباط با جبرهای دیفرانسیل مدرج معرفی شد، به دست می‌آید، پس از آن این $X$ـهمبافت به طور سیستماتیک در [۷] و [۸] و [۹] به کار رفت.

فرض کنید $A$ یک جبر باشد. فضای $\Omega^1 A$ متشکل از همه ۱ـفرمهای مجرد روی $A$ به عنوان دوـمدول[2] تشکیل شده از ترکیب‌های خطی عبارت‌های به صورت $xd(y)$، تعریف می‌شود که $x \in \tilde{A}$ و $y \in A$، که $\tilde{A}$ عبارت است از یکان شدهٔ[3] $A$. ساختار دوـمدول به وسیلهٔ قانون‌های زیر داده می‌شود:

$$a(xdy) = axdy, (xdy)a = xd(ya) - xyda, a \in A$$

(یعنی رابطهٔ $d(xy) = xdy + d(x)y$ معرفی می‌شود).

یک اثر بر $\Omega^1 A$ عبارت است از یک تابعک خطی $f$ چنانکه $f(wa) = f(aw)$ برای $a \in A$ و $w \in \Omega^1 A$. $X$ـهمبافت (دوگان) $X'(A)$ عبارت است از همبافت $\mathbb{Z}_2$ـ مدرج زیر

$$\{\text{اثرها بر } \Omega^1 A\} \underset{\delta}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \{\text{نگاشتها بر } A\}$$

عملگرهای مرزی به‌وسیله فرمول‌های $(\beta f)(xdy) = f([x,y]), (\delta f)(x) = f(dx)$ تعریف می‌شوند. تحقیق این‌که $\beta\delta = \delta\beta = 0$ سرراست است.

این همبافت فقط دو گروه مانستگی دارد که عبارت‌اند از مانستگی‌های زوج و فرد. مانستگی زوج $HX^{ev}$ عبارت است از فضای اثرهاــ تابعک‌های خطی بر $A$ که روی جابجاگرها صفر می‌شوندــ خارج

1) trace 2) bimodule 3) unitization

قسمت‌گیری شده توسط فضای «مشتق‌های» اثرها‌ـ تابعک‌های خطی به‌صورت $f\circ d$ که $f$ یک اثر بر $\Omega^1 A$ است. این خارج قسمت به درستی می‌تواند به عنوان فضای رده‌های مانستگی اثرها بر $A$ درنظر گرفته شود. با بحث مشابهی برای مانستگی فرد، به دست می‌آوریم:

$$HX^{ev}(A)=\{\text{رده‌های هموتوپی اثرها بر } A\}$$
$$HX^{od}(A)=\{\text{رده‌های اثرهای بسته بر } \Omega^1 A\}$$

که اثر $f$ بسته است اگر $f\circ d=0$.

یک همبافت طبیعی $X(A)$ وجود دارد که $X'(A)$ دوگان آن می‌باشد: یعنی،

$$A \underset{\beta}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} \Omega^1 A_\natural$$

که $\Omega^1 A_\natural$ عبارت است از خارج قسمت $\Omega^1 A/[A,\Omega^1 A]$ از $\Omega^1 A$ توسط جابجاگرها و $\natural:\Omega^1 A\to\Omega^1 A_\natural$ نگاشت خارج قسمت است و عملگرهای مرزی توسط رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta(x)=\natural(dx)\quad \text{و} \quad \beta(\natural(xdy))=[x,y].$$

مسلماً تا اندازه‌ای تعجب‌آور است که همبافت فوق‌العاده سادهٔ $X(A)$ باید نقش همبافت درام را در هندسهٔ ناجابجایی ایفا کند. در حالت جابجایی به‌وضوح این همبافت به همبافت درام تقلیل نمی‌یابد. مشابهت این همبافت درام اکنون توضیح داده می‌شود. این توضیح همچنین منتج به یک تعبیر جدید از نظریهٔ درام کلاسیک می‌شود.

نقطهٔ شروع این است که اگرچه کارکردن با اثرها یک شیوهٔ معتدل‌تر نسبت به روش آبلی‌کردن است، هنوز برای خیلی از جبرهای ناجابجایی به نتایج بدیهی منتج می‌شود. درواقع مثال‌هایی طبیعی از جبرهای $A$ وجود دارد که برای آنها هیچ (نگاشت) اثر نابدیهی وجود ندارد.

به همین دلیل محقق به بررسی اثرها بر جبرهایی که با $A$ از طریق توسیع مرتبط‌اند، رهنمون می‌شود. یک توسیع $A$ عبارت است از یک جبر $E$ که $A$ را به عنوان یک خارج قسمت (به‌وسیله یک ایده‌آل $I$) در بر دارد یا، به‌طور خلاصه، یک دنبالهٔ دقیق $0\to I\to E\to A\to 0$ که فلش‌ها همریختی‌های جبرها هستند. توسیع‌ها نقشی اساسی در هندسهٔ ناجابجایی ایفا می‌کنند.

جبر $A$ شبه‌ـآزاد نامیده می‌شود اگر در هر توسیع $A$ که ایده‌آل $I$ پوچ‌توان است (یعنی $I^K=0$ برای یک $K$)، همریختی $A\to E$ وجود داشته باشد که یک وارون چپ‌نگاشت خارج‌قسمت $E\to A$ باشد. این شرط به‌لحاظ صوری تقریباً با شرط هموار بودن که توسط گروتندیک برای جبرهای جابجایی و واریته‌های جبری معرفی شده، یکی است. هر جبر آزاد شبه‌ـآزاد است.

همانستگی دوری تناوبی جبر $A$، $HP^*(A)$ که $*=ev/od$، از نمایش $A$ به عنوان خارج‌قسمت یک جبر شبه‌ـآزاد $T$ به‌وسیلهٔ یک ایده‌آل $I$، به‌دست می‌آید و در این صورت می‌نویسیم

$$H(P)^*(A)=\varinjlim_{n} HX^*(T/I^n).$$

حقیقت مهم این است که این تعریف بستگی به انتخاب جبر شبه‌ـآزاد $T$ ندارد. مانستگی $HX^*(T/I^n)$ به طور اصولی عبارت است از همانستگی دوری معمولی (ناتناوبی) $HC^{2n+*}(A)$.

خیلی مشکل نیست که ببینیم $HP^*$ را می‌توان به طریق دیگر به‌وسیله فرمول زیر که در آن $od = ev + 1$می‌باشد به‌دست آورد:

$$HP^*(A) = \varinjlim_n HX^{*+1}(I^n)$$

در این تصویر یک هم‌دور دوری(از بعد $2n - 1$) توسط یک نگاشت اثر بر توان $n$ـام ایده‌آل در یک توسیع $A$ توصیف می‌شود.

این تعریف مانستگی دوری آشکارا با تعریف اولیهٔ ارائه‌شده توسط کُنز یا تسیگَن کاملاً متفاوت است. اثبات اینکه هر دو تعریف یک نتیجه را به‌دست می‌دهند نابدیهی است. توجه کنید که هر جبر $A$ دارای یک تجزیهٔ[1] ذاتی شبه‌ـآزاد (حتی آزاد)، که به‌وسیله جبر تانسوری $TA$ روی $A$داده می‌شود، می‌باشد.

یک شباهت چشمگیر بین مانستگی دوری تناوبی و مفهوم گروتندیک از مانستگی بینهایت کوچک، که توپولوژی واریته‌های ناهموار را در هندسهٔ جبری توصیف می‌کند، وجود دارد. در این مقایسه، جبرهای شبه‌ـآزاد نقشی را ایفا می‌کنند که واریته‌های هموار در کاتگوری ناجابجایی به عهده دارند و $X$ـهمبافت متناظر با همبافت درام است.

درحقیقت، در هندسهٔ جبری همانستگی بینهایت کوچک به این صورت تعریف می‌شود که حلقهٔ مختصاتی واریته، $A$ را به عنوان خارج‌قسمت $S/I$ حلقهٔ مختصاتی واریته هموار $S$ بنویسیم و آنگاه همانستگی درام کامل‌شدهٔ $S$ یعنی $\hat{S} = \varinjlim S/I^n$، را محاسبه کنیم. می‌توان نشان داد که این تعریف به انتخاب نشاندن در یک واریتهٔ هموار بستگی ندارد. این روش دقیقاً مشابه تعریف همانستگی دوری تناوبی است که در بالا ارائه شد. در آن تعریف، ما $A$ را به عنوان خارج‌قسمتی از یک جبر شبه‌ـآزاد $T$ می‌نویسیم و سپس مانستگی $HX^*(\hat{T})$ را محاسبه می‌کنیم.

فرض کنید دو جبر $A_1, A_2$ داده شده‌اند، ما همچنین می‌توانیم نظریهٔ دو متغیرهٔ دوری تناوبی $HP_*(A_1, A_2)$، که $* = 0, 1$ را به عنوان مانستگیِ همبافت همریختی بین $X$ـهمبافت‌های وابسته به توسیع‌های شبه‌ـآزاد $A_1$ و $A_2$ تعریف کنیم. یک ضرب (ترکیب) طبیعی به‌صورت زیر وجود دارد:

$$HP_i(A_1, A_2) \times HP_j(A_2, A_3) \longrightarrow HP_{i+j}(A_1, A_3)$$

هر همریختی جبرها $\alpha : A \longrightarrow B$ یک عضو $HP(\alpha)$ در $HP_0(A, B)$ را مشخص می‌کند.

نظریهٔ دوری تناوبی $HP_i(A_1, A_2)$ خاصیت‌های خیلی خوبی دارد. می‌توان نشان داد که این نظریه تحت اثر هموتوپی مشتق‌پذیر (هموار) و با ناوردای مُرتیا[2] در هر دو متغیر، ناوردا است. همچنین به موجب مرجع [۹] این نظریه در اصل کَندن[3]، به معنی زیر، صدق می‌کند.

1) resolution 2) Mortia 3) excision

فرض کنید $D$ یک جبر باشد. هر توسیع $0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} B \to 0$ دنباله‌هایی دقیق در $HP_*(0,D), HP_*(D,0)$ به صورت زیر القا می‌کند:

$$\begin{array}{ccccc} HP_0(D,I) & \xrightarrow{\cdot HP(i)} & HP_0(D,A) & \xrightarrow{\cdot HP(q)} & HP_0(D,B) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ HP_1(D,B) & \xleftarrow{\cdot HP(q)} & HP_1(D,A) & \xleftarrow{\cdot HP(i)} & HP_1(D,I) \end{array}$$

و

$$\begin{array}{ccccc} HP_0(I,D) & \xleftarrow{HP(q)\cdot} & HP_0(A,D) & \xleftarrow{HP(i)\cdot} & HP_0(B,D) \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ HP_1(B,D) & \xrightarrow{HP(i)\cdot} & HP_1(A,D) & \xrightarrow{HP(q)\cdot} & HP_1(I,D) \end{array}$$

حالت‌هایی خاص از این دنباله‌های دقیق قبلاً در مرجع‌های [۱۰] و [۱۶] به دست آمده‌بود. اینها یکی از ابزارهای اصلی در محاسبهٔ ناورداهای مانستگی دوری هستند.

**نشاندن فضاهای کوانتمی در فضاهای هموار-توسیع‌ها و $K$-تئوری**

در خلال سال‌ها (مثلاً [۳] و [۱۱] ، [۴] و [۶] را ببینید) محرز شده است که مهمترین مفهوم در توپولوژی ناجابجایی عبارت است از مفهوم توسیع. همچنانکه در بالا گفته شد، توسیع یک جبر، یک دنبالهٔ دقیق $0 \to I \to E \to A \to 0$ است که پیکان‌ها هم‌ریختی‌های جبرها هستند. به‌طور دوگان و شهودی چنین توسیعی متناظر با نشاندن فضای کوانتمی وابسته به $A$ در فضای کوانتمی وابسته به $E$ است.

برای توضیح نوع اطلاعات توپولوژیکی که در یک توسیع نهفته است، متذکر می‌شویم که محتوای قضیهٔ اندیس اَتیا-سینگر [۱] ممکن است به عنوان تعیین کلاس توسیع تعریف شده توسط عملگرهای شبه دیفرانسیل روی یک خمینه فشرده، تعبیر شود. دیگر قضیه‌های اندیس با توسیع‌های پیچیده‌تر مرتبط هستند.

اکنون می‌خواهیم به ترسیم یک ساختار کلی از $K$-تئوری توپولوژیک دومتغیره مبنی بر توسیع‌ها اقدام کنیم. این ساختار برای رسته‌های بسیاری از جبرهای ناجابجایی کار می‌کند و به‌خوبی در تعریف نظریهٔ دوری که طرحی از آن در بالا به دست داده شد، جا می‌گیرد. در نتیجه یک تبدیل طبیعی، مشخصهٔ چرن-کُنز دو متغیره، از $K$-تئوری توپولوژیک به نظریهٔ دوری وجود دارد.

به‌طور مشخص‌تر، از این به بعد فرض می‌کنیم، که همهٔ جبرهایمان جبرهای توپولوژیک با ساختاری تمام موضعاً محدب هستند که توسط یک خانواده از نیم‌نرمال‌ها $(p_\alpha)$ که در رابطه $p_\alpha(xy) \le p_\alpha(x)p_\alpha(y)$ برای هر $x, y$ در جبر صدق می‌کند، داده می‌شوند.

برای هر چنین جبر موضعاً محدب $A$، جبر تانسوری $A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} + \dots$ یک تکمیل‌شدهٔ طبیعی $TA$ دارد که یک جبر موضعاً محدب است. یک همریختی ذاتی جبرها $TA \to A$ وجود دارد که $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ را به حاصلضرب $x_1 x_2 \dots x_n$ تصویر می‌کند. هستهٔ این همریختی را با $JA$ نمایش

می‌دهیم، به‌این‌ترتیب یک تجزیهٔ آزاد برای $A$ به‌صورت $0 \to JA \to TA \to A \to 0$ به‌دست می‌آید که می‌تواند به عنوان یک نشاننده از فضای کوانتمی وابسته به $A$ به فضای کوانتمی هموار وابسته به $TA$ تعبیر شود. این ایده‌آل با مکمل تصویر فضای کوانتمی برای $A$ متناظر است. چون $JA$ نیز یک جبر موضعاً محدب است، می‌توانیم با تکرار این روش $J^{۲}A = J(JA)$ و به‌طور استقرایی $J^nA = J(J^{n-۱}A)$ را بسازیم.

با یک جبر موضعاً محدب $B$، می‌توانیم جبر $M_\infty(B)$ متشکل از ماتریس‌های بینهایت $(b_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ را مرتبط کنیم که درایه‌های آنها در $B$ سریعاً نزولی است. فضای کوانتمی متناظر شبیه مثال (۱) از مقدمه است. آن فضا دارای بینهایت نقطه است که به‌وسیله $\mathbb{N}$ نشاندار شده‌اند و نیز فلش‌های بین نقاط اندیس‌دار، که به‌وسیلهٔ همه اعضای ممکن $B$ نشاندار شده‌اند. یک توسیع بنیادی، با به‌کاربردن عملگرهای شبه‌ـدیفرانسیل روی دایره، نشان می‌دهد که برای هر جبر $A$ همریختی ذاتی $J^{۲}A \to M_\infty(B)$ وجود دارد. این نگاشت را می‌توان برای تشکیل حد استقرایی در تعریف زیر به‌کار برد.

فرض کنید $A$ و $B$ جبرهای موضعاً محدب باشند و $* = ۰, ۱$. تعریف می‌کنیم

$$KK_*(A,B) = \lim_{\overrightarrow{K}}[J^{۲k+*}A, M_\infty(B)]$$

که $[J^{۲k+*}A, M_\infty(B)]$عبارت است از مجموعهٔ کلاس‌های هموتوپی (مشتق‌پذیر) همریختی‌های $J^{۲k+*}A \to M_{infty}(B)$. $KK_*(A,B)$، با عمل جمع مستقیم عادی نگاشت‌ها در ماتریس‌ها، یک گروه آبلی است.

چون محاسبهٔ مانستگی $X$ـهمبافت یک صورت جبری از محاسبهٔ کلاس‌های هموتوپی است، این تعریف به‌طور قابل توجهی شبیه تعریف نظریهٔ دوری تناوبی در معادلهٔ (۱) از بخش قبلی است.

این دوـ تابعگر $KK_*$ همان خواص مجرد $HP^*$ را دارد (بخش قبل را ببینید). بالاخص:

- هر همریختی $\alpha : A \to B$ یک عضو $KK_{۰}(\alpha)$ را القا می‌کند.
- یک ضرب شرکت‌پذیر $KK_i(A,B) \times KK_j(B,C) \to KK_{i+j}(A,C)$ (که $i,j \in \mathbb{Z}_{۲}$، و $A$ و $B$ و $C$ جبرهای موضعاً محدب هستند) وجود دارد که در هر دو متغیر جمعی است و در رابطهٔ $KK(\alpha)KK(\beta) = KK(\alpha,\beta)$ برای هر دو همریختی $\alpha$ و $\beta$ صدق می‌کند.
- $KK_*$ ناوردای هموتوپی است (تحت هموتوپی ناوردا است) و اصل کَندن را در هر دو متغیر ارضاء می‌کند (همچنانکه در بخش قبل توصیف شد). نگاشت ذاتی $B \to M_\infty(B)$ یک یکریختی در هر دو متغیر $KK_*$ القا می‌کند.

در حقیقت می‌توان نشان داد که $KK_{۰}$ عبارت است از تابعگر جهانی از رستهٔ جبرهای موضعاً محدب مانند بالا به یک رستهٔ جمعی که در خاصیت سوم صدق می‌کند.

اگرچه این روش ساخت $K$ـتئوری واقعاً متفاوت از رویکرد معمولی است که افکنش‌ها یا مدول‌های افکنشی را به کار می‌برد، مشاهده می‌شود هنگامی‌که در حالت خاص متغیر اول را به یک نقطه تبدیل کنیم،

یعنی به جبر $\mathbb{C}$ از اعداد مختلط، $KK_*(\mathbb{C}, B)$ چیزی جز $K$ـگروه معمولی در حالتیکه $B$ یک جبر باناخ [۲] یا یک جبر فرشه[1] [۱۳] باشد، نیست (حالت‌هایی که در آنها $K$ـتئوری معمولی تعریف شده است).

یک خاصیت مهم دیگر این است که هر توسیع، یا به‌طور کلی‌تر هر توسیع $n-$"مرحله‌ای" به صورت $0 \to B \to E_1 \to \cdots \to E_n \to A \to 0$ عضوی از $KK_n(A,B)$ را به‌دست می‌دهد که $n$ به پیمانهٔ ۲ شمرده می‌شود. در جبر همولوژی می‌توان یک ضرب مشهور روی این توسیع‌ها به‌نام ضرب یُندا را به‌کار برد که به‌طور ساده عبارت است از به هم بستن[2] دو توسیع از این نوع. این ضرب با ضرب $KK_n(A,B) \times KK_m(B,C) \to KK_{n+m}(A,C)$ سازگار است.

عملگرهای شبه دیفرانسیل روی یک خمینه هموار فشرده به یک توسیع $0 \to \Psi_{-1} \to \Psi_0 \to C^\infty(S^*M) \to 0$ منجر می‌شود که $\Psi_0, \Psi_{-1}$ ترتیب جبرهای عملگرهای شبه دیفرانسیل از مرتبه‌های ۱− و ۰ هستند و $C^\infty(S^*M)$ عبارت است از جبر نگاشت‌های هموار روی کلاف هم‌ـکروی $M$. مسأله‌ای که به‌وسیله قضیهٔ اندیس اتیاـسینگر حل شد دقیقاً عبارت است از تعیین کلاسی در $KK_1(C^\infty(S^*M), \Psi_{-1})$ که توسط این توسیع تعریف می‌شود.

### مشخصهٔ دو متغیرهٔ چرن‌ـکُنز

مهمترین بخش در ساختن یک تبدیل دو متغیرهٔ ضربی از $KK_*$ به نظریهٔ دو متغیرهٔ $HP_*$ بر رسته جبرهای موضعاً محدب عبارت است از خاصیت جهانی بودن $KK_0$ که در پایان بخش قبلی بیان شد.

چون $HP_0$ خواصی را که $KK_0$ برای آنها جهانی است، داراست، فوراً تبدیل زیر را $Ch : KK_0(A,B) \to HP_0(A,B)$ که با حاصلضرب قابل مقایسه است، به‌دست می‌آوریم.

در کوشش برای گسترش این تبدیل به یک تبدیل ضربی از نظریهٔ $\mathbb{Z}_2$ـمدرج $KK_*$ به $HP_*$، با این مسأله مواجه می‌شویم که حاصل‌ضرب دورهٔ فرد در $KK_*$ و $HP_*$ به صورت‌های مختلف تعریف می‌شوند. برای رفع این مشکل باید ضریب (تا اندازه‌ای به دلخواه) $\sqrt{2\pi i}$ را معرفی کرد. با این شرط تبدیل زیر که با عمومیت تمام ضربی است به‌دست می‌آید:

$$Ch : KK_*(A,B) \to HP_*(A,B)$$

هر دو نظریهٔ همانستگی دوری $HP^*(A)$ و $K$ـمانستگی $KK_*(A,\mathbb{C})$، چون به عنوان حدهای القایی تعریف می‌شوند، دارای یک پالایش (بُعدی) طبیعی هستند. به این پالایش بعدی در مقدمه به‌طور ضمنی اشاره شد.

رفتار این پالایش‌ها تحت شاخص چرن‌ـکُنز به‌خاطر بررسی خیلی ظریف نگاشت مرزی دنبالهٔ دقیق در مانستگی دوری توسط م. پوشینگ و ر. مِیِر به‌خوبی بررسی شده است. به‌ازای عضو $\alpha$ در $KK_*(A,\mathbb{C})$ ، بُعد $Ch(\alpha)$ دارای کران $3^d$ است که $d$ بعد $\alpha$ در $K$ـتئوری است. این تخمین بهینه است. در پایان این مقاله، می‌خواهیم تأکید کنیم که علیرغم تعریف به‌ظاهر مجرد، ناورداهای نظریهٔ دوری و

1) Fréchet 2) splicing

$K$ـتئوری می‌توانند برای گسترهٔ بزرگی از جبرهای ناجابجایی به صورتی بسیار صریح محاسبه شوند. چند مثال نمادین در مقدمه توصیف شد.

## مراجع


[1] M. F. ATIYAH and I. M. SINGER, the index of elliptic operators I,*Ann. of Math.* (2) **87** (1968), 484-530.

[2] B. BLACKADAR, *K-theory for Operator Algebras,* Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York-Tokyo, 1986.

[3] L. G. BROWN, R. G. DOGLAS, and P.FILLMORE, Extensions of $C^*$-algebras and K-homology, *Ann. of math.* 105 (1977), 265-324.

[4] A. CONNES, Non-commutative differential geometry, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **62** (1985), 257-360.

[5] —–, *Non-commutative Geometry*, Academic Press, London-Sydney-Tokyo-Toronto, 1994.

[6] J. CUNTZ, Bivariante K-theorie für lokalkonvexe Algebren und der bivariante Chern-Connes-Charakter, *Doc. Math.* J. DMV **2** (1997), 139-182; http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/.

[7] J.CUNTZ and D. QUILLEN, Algebra extensions and nonsingularity, *J.Amer. Math. Soc.* **8** (1995), 251-289.

[8] ——, Cyclic homology and nonsingularity, *J.Amer. Math. Soc.* **8** (1995), 373-442.

[9] ——, Excision in bivariant periodic cyclic cohomology, *Invent. Math.***127** (1997), 67-98.

[10] T. G. GOODWILLIE, Cyclic homology and the free loopspace, *Topology* **24** (1985), 187-215.

[11] G. G. Kasparov, The operator K-functor and extentions of $C^*$-algebras (in Russian), *Izv. Akad. Nauk.* SSSR Ser. Mat. **44** (1980),571-636; Math. USSR Izv. **16** (1981), 513-572.

[12] V. NISTOR, A bivariant Chern-Connes character, *Ann. of Math.* **138** (1993), 555-590.

[13] C. PHILLIPS, K-theory for Fréchet algebras, Internat. J. Math. **2** (1991), 77-129.

[14] D. QUILLEN, Chern-Simons forms and cyclic cohomology, *the interface of Mathematics and Particle physics*, Claredon Press, 1990, pp. 117-134.

[15] B. TSYGAN, The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology (in Russian), *Uspekhi. Mat. Nauk* **38** (1983), 217-218; *Russian Math. Surveys* **38** (1983), 198-199.

[16] M. WODZICKI, Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory, *Ann. of Math.* **129** (1989), 591-639.

سید محمدباقر کاشانی

دانشگاه تربیت مدرس، بخش ریاضی

پست الکترونیک: kashanim@net1c.modares.ac.ir