فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۷ (پاییز ۱۳۸۰)، صص. ۳۷ تا ۴۸

ویتگنشتاین و مبانی ریاضیات

عبدالحسین امینی شارستانی

به دلایل متعدد فلسفهٔ ویتگنشتاین پیوندهای ویژه‌ای با مسائل مبانی ریاضیات دارد. او کتاب کم حجم اما مهم خود، رساله منطقی-فلسفی ترکتتوس[1]، را در فضای پر ثمر جدال مبانی در ۱۹۲۱ منتشر کرد. ترکتتوس کتابی فلسفی به عام‌ترین مفهوم آن است؛ اساساً به خود مسألهٔ فلسفه می‌پردازد. اما ساختار آن ناظر به منطق‌گرایی[2] فرگه و راسل صورت داده شده است. پس از آن، در دوره دوم زندگی فلسفی خود، ویتگنشتاین جریان‌های تازهٔ مبانی ریاضیات را در محفل‌های وین و کمبریج تجربه کرد. به خصوص در این دوره فلسفه‌های ریاضی ساخت‌گرا بر او مؤثر افتاد و فضای نوشته‌های او را از سایهٔ سنگین ادبیات منطق‌گرایانه آزاد ساخت. سپس از میان این تجربیات اندیشه‌های ترکتتوس متحول گشت و به ویتگنشتاین پژوهش‌های فلسفی[3] رسید.

ویتگنشتاین پیش از هر چیز یک فیلسوف است. انگیزه‌های بنیادین کارهای او همان سؤالات دیرین سنت فلسفی است؛ مانند هستی، زیبایی، دانش و اخلاق. اما رهیافت او به مسأله با شیوهٔ کلاسیک متفاوت است. دیگر حل مسائل فلسفی با سرگردانی در پی یافتن پاسخی برای پرسش‌های تاریخ فلسفه صورت نمی‌گیرد، بلکه با روشن ساختن گزاره‌های زبان و بازنمایی کاربردهای عبارات، این پرسش‌ها ناپدید می‌شوند. به هر صورت فلسفه دیگر فعالیتی است که به زبان مربوط می‌شود. برای بررسی فلسفهٔ ویتگنشتاین بسیار مهم است که این منطق متفاوت او فراموش نشود.

مفسران فلسفه ویتگنشتاین را به دو دوره تفکیک می‌کنند: متقدم و متأخر. البته نه به این معنا که این دو دوره کاملاً از هم مجزا باشند. فلسفهٔ متقدم او یک طرح دقیق از ساختار زبان و جهان به دست می‌دهد. او انگیزه‌هایش را از کارهای فرگه و راسل می‌گیرد اما خود نظریهٔ تصویری زبان را به عنوان تبیین

1) *Tractatus Logico-Philosophicus* 2) Logicism 3) *Philosophical Invistigations*

بهتر ارائه می‌دهد. سپس در اواخر دههٔ ۲۰ و اوایل دههٔ ۳۰ ویتگنشتاین نزد پُزیتیویست‌های منطقی حلقهٔ وین و سپس در کمبریج به تشریح و تأمل درباره رسالهٔ منطقی‌ـفلسفی پرداخت. در این دوره که از آن به نام دورهٔ گذار یاد می‌کنند توجه ویتگنشتاین به فلسفهٔ ریاضی بیش از هر زمان دیگر بود. به این ترتیب اندیشه‌های ترکتتوس کم‌کم متحول شدند تا به آنجا که ما به صورت‌بندی تازه‌ای از مسائل می‌رسیم که فلسفهٔ متأخر او را تشکیل می‌دهد. کتاب معروف پژوهش‌های فلسفی نمایندهٔ ویتگشتاین متأخر است. پژوهش‌های فلسفی تبیین ترکتتوسی از مسألهٔ زبان و معنا را که مبتنی بر نظریهٔ تصویری زبان است کنار می‌گذارد و به تبیین شگفت‌انگیز تازه‌ای می‌رسد. اساساً در اینجا هر نوع نظریه‌پردازی در باب معنا جایگاه خود را از دست می‌دهد. به جای آن مفهوم «بازهای زبانی» به میدان می‌آید و تبیین بدیل را ارائه می‌دهد.

ترکتتوس نمایندهٔ فلسفه متقدم ویتگنشتاین است. این کتاب نتیجهٔ دوره‌ای از زندگی فلسفی اوست که او نزد راسل به یادگیری و اندیشه دربارهٔ مسایل اصول ریاضیات[1] گذراند. ویتگنشتاین از آن گروه از فیلسوفان است که ورودش به فلسفه از راه آموزش‌های منظم نبوده است. خانوادهٔ او که از اشراف اتریش بودند فرزندان خود را به دست مدارس مرسوم آن زمان نسپردند، بلکه خود به آموزش و تربیت آنان اهتمام کردند. اما خانهٔ آنها محل آمد و شد هنرمندان و روشنفکران وین بود (مانند گوستاو مالر) و این موضوع می‌توانست تأثیر جدی در شکل‌گیری ذهن فلسفی ویتگنشتاین داشته باشد. ویتگنشتاین در منچستر دانشجوی مهندسی هوانوردی بود که به کتاب اصول ریاضیات راسل و وایتهد دست یافت. اندیشه‌های نو فرگه و راسل در آن کتاب دربارهٔ منطق و فلسفه او را سخت به خود جذب نمود. او در سال ۱۹۱۲ به عنوان دانشجو وارد کمبریج شد و نزد راسل به آموختن و اندیشه دربارهٔ منطق و فلسفه پرداخت. ترکتتوس که او آن را در سال ۱۹۲۱ پس از آزادی از اسارت در جنگ منتشر کرد می‌تواند کارنامهٔ این دوره باشد.

بنابراین می‌توان گفت که فضای ترکتتوس تحت تأثیر اندیشه‌های راسل و فرگه است. به خصوص این اندیشهٔ نظریهٔ بازنمایی (نظریه توصیفات[2]) راسل که ما دارای یک زبان جهانی منطقی هستیم که گوهر همهٔ زبان‌هاست، در ترکتتوس پذیرفته شده است. ویتگنشتاین با تحسین می‌گوید که راسل نخستین کسی است که دریافت ساختار منطقی جمله‌های زبان ممکن است با ساختار نحوی آن کاملاً متفاوت باشد. با این حال ویتگنشتاین راه جداگانهٔ خود را می‌رود و از راسل و فرگه انتقاد می‌کند. به نظر او شیوهٔ قانون‌های بنیادین فرگه و نظریهٔ کلاس‌های راسل یک دید ناسازگار و نادرست درباره منطق به دست می‌دهد. در برابر، ویتگنشتاین نظریهٔ تصویری زبان را طرح کرد که اساساً تبیین تازه‌ای از زبان و جهان است و با این حال نتایج فنی فراوانی نیز برای مسائل مبانی ریاضیات در پی دارد. این نظریه تبیین تازه‌ای از منطق، ریاضیات، استنتاج منطقی، برهان ریاضی و از این قبیل ارائه می‌کند. به خصوص در این نظریه مبانی حساب بر اساس مفهوم «عمل[3]» سامان داده می‌شود. این اندیشه بسیار دارای اهمیت است و می‌توان نشانه‌های ریاضیات ساخت‌گرایانه را در آن به وضوح یافت.

1) *Principia Mathematica* 2) Theory of Description 3) operation

پرینکیپیا متمتیکا برنامهٔ منطق‌گرایی فرگه را پی می‌گیرد که اساس آن تقلیل ریاضیات به منطق است. راسل بر آن است که نوع سازگارتری از تبیین منطق گرایانهٔ ریاضیات را نسبت به فرگه ارائه دهد و بنابراین نظریه کلاس‌ها (نظریه انواع) را مطرح می‌کند و از آنجا کل ساختار اعداد را بر اساس کلاس‌ها و جبر میان آنها سامان می‌دهد. گذشته از نارسایی‌های خرد و بزرگ دستگاه راسل، به نظر ویتگنشتاین اساس نظریهٔ کلاس‌های او با روح برنامهٔ منطق‌گرایی ناسازگار است. زیرا اصل‌های بی‌نهایت و کاهش‌پذیری که منطق‌گرایی راسل نیازمند آنها است، بر فرض که درست باشند راستی آنها تصادفی خواهد بود نه منطقی. چیز دیگری که از این سخن ویتگنشتاین بر می‌آید تعهد او درترکتتوس به برنامهٔ منطق‌گرایی می‌تواند باشد.

فرگه در برابر این سخن کانت که گزاره‌های ریاضیات پیشینی ترکیبی هستند ایستاد. از نظر او گزاره‌های ریاضیات تحلیلی هستند. البته مفهوم تحلیلی نزد فرگه با کانت کاملاً یکسان نیست. فرگه یک فهرست از قانون‌های بنیادین منطق را ارائه می‌کند، آنگاه یک گزارهٔ تحلیلی خواهد بود اگر بتوان نشان داد که آن از قانون‌های بنیادین منطق و تعریف‌هایی که برابر آنها صورتبندی شده‌اند استنتاج می‌شود. کانت گزاره‌های تحلیلی را به نحو دیگری تعریف می‌کند اما در هر صورت مفهوم‌های تحلیلی فرگه، گزاره‌های تحلیلی کانت و این همانی لایبنیتز را می‌توان در یک گروه جای داد.

طبق صورت‌بندی کانت گزاره‌ها یا تحلیلی[1] هستند یا ترکیبی[2] و گزاره‌های ترکیبی یا پیشینی[3] هستند یا پسینی[4]. گزاره‌های تحلیلی آنهایی هستند که محمول آنها در موضوع مندرج باشد. پسینی بودن نیز وابستگی به ادراک حسی را می‌رساند. گزاره‌های پیشینی ترکیبی تابع ادراک‌های حسی ما نیستند، آنها ضروریند به این معنا که راست بودن هرگزاره‌ای درباره جهان فیزیکی محتاج راست بودن آنها است. اساساً التزام کانت به وجود گزاره‌های پیشینی ترکیبی مورد توجه بوده است. گزاره‌های حساب و هندسه مثال‌های مهم کانت برای این دسته هستند. این نوع گزاره‌ها هنگامی به میان می‌آیند که ما به فضا و زمان به مثابهٔ ظرف‌های ناگزیر تجربه‌های حسی می‌نگریم. در این صورت، این دو دیگر وابسته به تغییرات در ادراکات حسی ما نیستند و بنابراین گزاره‌های مربوط به آنها پیشینی خواهد بود. اما از جانب دیگر کانت فضا و زمان ادراکی[5] را به مثابهٔ اشیاء می‌نگرد نه خواص اشیاء؛ یعنی به فضا به مثابهٔ یک جعبه می‌نگرد و به زمان به مثابهٔ یک جریان. گزاره‌های مربوط به فضا‌ـجعبه و زمان‌ـجریان ترکیبی خواهند بود. گزاره‌های حساب درباره زمان ادراکی هستند وگزاره‌های هندسی دربارهٔ فضای ادراکی. بنابراین آنها پیشینی ترکیبی هستند.

فرگه در برابر کانت برنامهٔ تحویل ریاضیات به منطق را در پیش گرفت و این اندیشه او بر راسل و ویتگنشتاین ترکتتوس نیز مؤثر افتاد. اما تبار منطق گرایی حتی به گذشتهٔ دورتر برمی‌گردد. اندیشهٔ لایبنیتز دربارهٔ ماهیت و راستی گزاره‌های ریاضی پتانسیل قوی از منطق‌گرایی را در خود دارد. لایبنیتز از آن گروه از فیلسوفان است که یک تبیین فراگیر از مسایل فلسفه بر اساس یک اندیشهٔ مرکزی قوی به دست داده‌اند.

1) Analytic 2) Synthetic 3) A priori 4) A postriori 5) Perceptual Space & time

او این کار را با مفهوم موناد[1] صورت داده است. مونادها وجودهای مستقلی هستند که هر کدام ادراک کاملی از جهان را در خود دارند. از اینجا است که هستی‌شناسی و معرفت‌شناسی و دیگر مسایل فلسفه لایبنیتز شکل می‌گیرد. به‌خصوص بازتاب آن در فلسفهٔ منطق لایبنیتز این است که او تمام گزاره‌ها را به گزاره‌های موضوع‌ـمحمول که محمول در موضوع مندرج است کاهش می‌دهد (یک گام فراتر از ارسطو). اما لایبنیتز همچنین میان دو نوع راستی گزاره‌ها تفاوت می‌گذارد: ۱ـ راستی استدلالی[2] ۲ـ راستی واقع[3]. راستی استدلالی چنین به دست می‌آید که ما گزارهٔ موردنظر را طی گام‌های متناهی به آنجا برسانیم که اندراج محمول در موضوع بدیهی گردد. به عبارت دیگر تا جایی که اصل امتناع تناقض داوری کند. لایبنیتز این نوع گزاره‌ها را این‌همانی[4] می‌خواند. اما راستی واقع چنین نیست، تنها خدا می‌تواند اندراج محمول در موضوع را در آنها به دست آورد، چون این کار متضمن بی‌نهایت گام است. گزاره‌های ریاضی این‌همانی هستند، آنها به این دلیل راست هستند که از خلاف آن تناقض می‌آید نه به خاطر اینکه از اشیای جهان راست بنیادی سخن می‌گویند (چون جهان مثل افلاطونی). بنابراین اندیشهٔ تحویل ریاضیات به منطق نزد لایبنیتز قدرتمندانه مطرح بوده است.

مسألهٔ مهم دیگر درمورد فرگه التزام او به اشیای مجرد است. او در کتاب مبانی حساب[5] بحث می‌کند که آیا با گزاره‌های حساب چون $۴ = ۲ \times ۲$ می‌توان تنها با بحث دربارهٔ فرایندهای روانشناسانه و طبیعی و تاریخی برخورد نمود (چنانکه رسم زمانهٔ او بود.) او سپس بحث را به اینجا می‌رساند که ما در این موارد نیازمند تحلیل معنایی محض و مفاهیمی از قبیل توجیه‌مندی تعریف‌ها[6] و استحکام منطقی برهان‌ها[7] هستیم. این دیدگاه او را به رهیافت منطق‌گرایانه به ریاضیات راه می‌برد. اما او همچنین استدلال می‌کند که راستی گزاره‌های حساب مستلزم وجود اشیایی است که (به حسب ظاهر) از آنها سخن می‌گویند. برایند این بحث او را به پذیرش اشیای مجرد می‌کشاند (در برابر اشیای واقعی[8]) او می‌گوید اشیای مجرد دارای تأثیر عِلّی نیستند و نمی‌توان به آنها از راه اشاره و نامگذاری رسید. آنها خود را در نحو زبان نشان می‌دهند و وجود دارند. اما این همان جایی است که فرگه دچار تناقض شده است زیرا آرمان منطق‌گرایی می‌طلبد که ریاضیات دربارهٔ هیچ شیء خاصی نباشد چرا که منطق دربارهٔ چیز خاصی نیست.

راسل برای رهایی از این تناقض، داستان اشیای مجرد فرگه را کنار می‌گذارد. راستی گزاره‌های حساب نزد او مستلزم وجود اشیای بخصوصی نیست. به این ترتیب راسل نظریهٔ کلاس‌ها را برای تبیین منطقی حساب مطرح می‌کند. گزاره‌های حساب درباره کلاس‌ها هستند. کلاس‌ها اشیای حقیقی نیستند بلکه شیءـجایگاه هستند.

نظریهٔ کلاس‌ها شاید بتواند ما را از تناقض فرگه برهاند اما خود دارای پیامدهای سنگین و ناخوشایند

1) Monad 2) Truth of reasoning 3) Truth of facts 4) Identity 5) *Foundations of arithmatics* 6) Justification 7) cogency 8) Concrete

است زیرا برای به دست آوردن بی‌پایانی رشتهٔ اعداد طبیعی و تمامیت اعداد حقیقی ناگزیر می‌گردد که اصل‌های بی‌نهایت[1] و کاهش‌پذیری[2] را وضع کند که اینها به گفتهٔ ویتگنشتاین هزینهٔ فراتر از منطق را به ما تحمیل می‌کند و باز برنامه منطق‌گرایی ناکام خواهد ماند. همچنین راسل برای دوری از ناسازگاری درونی نظریهٔ کلاس‌ها (پارادوکس راسل) نظریهٔ type (نظریهٔ طبقات) را طرح نمود که برایندش این است که هر کلاسی مجاز نیست. این چاره‌اندیشی راسل نیز به مانند وصله‌کردن درزهای یک نظریه است و ویتگنشتاین را از تردید در اساس صورت‌بندی او از ریاضیات و منطق باز نمی‌دارد.

منطق‌گرایی هر چند که اکنون اعتبار از کف داده است، در ابتدای قرن بیستم یک اتفاق مهم در فلسفهٔ ریاضیات بود. یک دلیل عمده برای آن میدان داری، پاسخ این گرایش به بسیاری از مسائل بنیادی فلسفهٔ ریاضیات بود که تا آن زمان هیچ نظریهٔ دیگری نتوانسته بود به آن حد به عمق و جزئیات مطلب پیش برود. این نظریه ماهیت متفاوت نظریه و برهان را در ریاضیات نسبت به علوم طبیعی توضیح می‌دهد و نیز کیفیت متفاوت راستی را در ریاضیات، و تبیین می‌کند که چرا ریاضیات برای یک مدعا هزینهٔ هنگفت می‌طلبد. این نظریه به کاربردمندی ریاضیات نیز اهمیت می‌دهد و آن را تبیین می‌کند.

ویتگنشتاین می‌گوید ریاضیات یک روش منطق است. این ما را ترغیب می‌کند که او را در ترکتتوس یک منطق‌گرا بدانیم اما بدون تردید داوری دربارهٔ ویتگنشتاین کار ساده‌ای نیست. آیا اصلاً می‌توان او را طرفدار مکتب خاصی دانست؟ زیرا برآیند ترکتتوس آن است که فلسفه یک فعالیت است نه مجموعه‌ای از گزاره‌های راستین. گذشته از آن اگر هم بخواهیم دربارهٔ منطق‌گرایی ترکتتوس سخن بگوییم باید که نخست به ارائهٔ متفاوت ترکتتوس از منطق و زبان توجه کنیم.

گوهر تبیین ترکتتوس از زبان و معنا آن چیزی است که از آن به نظریهٔ تصویری زبان یاد می‌کنند. هر گزارهٔ راست تصویر یک بوده است. این در طرح ترکتتوس سخنی است مهم و دارای پیامدهای سنگین فنی و فلسفی. پیش از هر چیز لازم است رابطه «تصویر بودن» دانسته شود. تصویر رابطه‌ای است میان یک وضعیت اشیاء با وضعیت اشیای دیگر. آنچه آنها را تصویر یکدیگر می‌سازد «ساختمان منطقی» آنها است [3] یعنی اینکه عناصر آنها در نسبت تصویری یکسان هستند. صفحهٔ گرامافون، اندیشهٔ موسیقایی و نوت‌نویسی موسیقایی همگی، هرچند در نگاه اول متوجه نباشیم، دارای ساختمان منطقی همسان هستند و این ما را مجاز می‌سازد که آنها را تصویر منطقی همدیگر بدانیم. برای برپایی این نظریه در مورد زبان و جهان، ترکتتوس ابتدا طرحی از جهان به دست می‌دهد:جهان مجموعهٔ بوده‌هاست. جهان مجموعهٔ چیزها نیست. هر بوده یک وضعیت چیزهای موجود است. یک وضعیت چیزها یک هیأتی از اشیا است در نسبتی خاص با همدیگر. و ... سپس رابطهٔ تصویری میان زبان و جهان به صورت زیر ارائه می‌گردد:

1) Infinity 2) Reducibility 3) logical form, pictorial form

جهان → ← زبان
بوده‌ها[1] → ← گزاره‌ها[2]
وضعیت چیزها[3] → ← گزاره‌های اتمی[4]
اشیا[5] → ← نام‌ها[6]

سخن ویتگنشتاین درباره جهان از جایگاه یک فیلسوف است. این سخن دارای ماهیت فلسفی است، اما به نظر می‌رسد که او جهان را از روی ساختاری که برای زبان قایل است ساخته است، به خصوص به نحوی که نظریهٔ تصویری او را تصدیق کند.

به این ترتیب نظریهٔ تصویری معنای ترکتتوس شکل می‌گیرد. یک تصویر مستقل از راستیش دارای معناست و آن همان وضعیت چیزهایی است که می‌نگارد. بنابراین یک گزاره هنگامی معنادار است که یک وضعیت چیزهای ممکن را بنگارد. اما اینکه چه وضعیت چیزهایی ممکن است یا به عبارت دیگر یک شیء در چه وضعیت چیزهایی می‌تواند حضور داشته باشد از خواص گوهرین آن شیء است. به عنوان مثال، رشتهٔ «نظریه کلاس‌های راسل خوشبوست» دیگر بی معنا است.

یک تصویر هماره دارای معنا است اما برای راستیش باید با واقعیت سنجیده شود. این کار همانند کاربرد خط‌کش اندازه‌گیری انجام می‌شود. عناصر تصویر در جایگاه نقاط انتهایی خط‌کش در برابر اشیا (عناصر واقعیت) گذارده می‌شوند و از آنجا به دست می‌آید که آیا دارای صورت منطقی یکسان هستند یا نه. اما بنابراین یک گزاره دیگر از صورت منطقی وضعیت چیزها و خواص صوری (درونی) اشیا سخن نمی‌گوید، بلکه آنها خود را در گزاره نمایش می‌دهند. به ازای صورت منطقی واقعیت هیچ نمادی در گزاره پدید نمی‌آید. صورت منطقی گفتنی نیست بلکه نمایش دادنی است.

تفاوت میان گفتن و نمایش یک اندیشهٔ بنیادین ترکتتوس است. این تفاوت در تبیین ویتگنشتاین از فلسفه، منطق و ریاضیات دارای اهمیت اساسی است. زیرا از آن برمی‌آید که تنها گزاره‌های علوم طبیعی معنا دارند و گزاره‌های منطق و متافیزیک بی‌معنایند. اما این نیز به معنای تعطیل این حیطه‌ها از فعالیت‌های انسانی نیست. به خصوص جایگاه تازه‌ای که فلسفه در این دیدگاه می‌یابد آن است که فلسفه دیگر یک فعالیت است برای روشن‌سازی گزاره‌های علوم طبیعی نه مجموعه‌ای از گزاره‌های راستین. بنابراین ویتگنشتاین در ترکتتوس نظریهٔ بخصوصی دربارهٔ زبان و جهان به دست نمی‌دهد. به‌جز این، دوگانهٔ گفتن-نمایش مبنایی است برای خرده‌گیری‌های فنی ویتگنشتاین بر فرگه و راسل. به عنوان مثال کثرت[7] از خواص صوری واقعیت است و بنابراین هیچ نمادی برای آن در گزاره نمی‌تواند گذارده شود. کثرت تنها می‌تواند در صورت گزاره نمایش داده شود. از جمله در گزارهٔ $\forall x.fx$ کلیت از خود متغیر x فهمیده می‌شود نه از نماد $\forall x$ که علامت ضرب منطقی است (4.0411). مثال دیگر: روابط منطقی میان

---

1) facts 2) propositions 3) states affairs 4) elementary propositions 5) objects, things 6) names 7) multiplicity

اجزای بوده‌ها روابط صوری هستند و بنابراین نمی‌توانند توسط نمادهایی چون $\wedge$، $\vee$، $\subset$، . . . و غیره نگاشته شوند. این نمادها دارای اصالت منطقی نیستند، آنها تنها علایم نگارشی هستند.

گزاره‌های منطق و ریاضیات نیز بی‌ـمعنا هستند. زیرا گزاره‌های معنادار آنهایی هستند که برای راستی‌شان با واقعیت سنجیده می‌شوند. ولی گزاره‌های منطق و ریاضیات چنین نیستند. آنها شبه‌ـگزاره[1] هستند. تمام هستی منطق را می‌توان در همانگویی‌ها خلاصه نمود که راستی آنها گوهرین است. آنها با واقعیت سنجیده نمی‌شوند بلکه راستی آنها از خواص صوری زبان است. اما به رغم بی‌معنایی، هرگز بی‌فایده نیستند، بلکه ساختار زبان و جهان و محدودیت‌های نحوهٔ اندیشیدن ما را از جهان نشان می‌دهند. سپس ویتگنشتاین بحث را به آنجا می‌رساند که ریاضیات یک روش منطقی است. گزاره‌های ریاضی معادلات میان نمادها هستند. آنها نیز شبه‌گزاره هستند (۶). معادلات ریاضیات و همانگویی‌های منطق معنادار نیستند اما با صورت خود به ما شهودی از ساختار منطقی زبان و جهان می‌دهند.

ارائهٔ بنیاد متفاوت ویتگنشتاین از منطق و ریاضیات نتایج گسترده‌ای در پی دارد. از جمله شهود و برهان در ریاضیات و منطق دیگر آن جایگاه پیشین را نخواهد داشت. شهود به معنای مشاهدهٔ یک واقعیت در جهان افلاطونی یا تجربی در ریاضیات جایی نخواهند داشت. به گفتهٔ او به این پرسش این گونه نیز می‌توان پاسخ داد که تمام شهود لازم را خود زبان برای ما فراهم می‌کند. برهان ریاضی نیز بیانگر هیچ ارتباط علمی نیست بلکه تنها وسیله‌ای کمکی است برای آن که ما گزارهٔ ریاضی را (معادلات میان نمادها را) آسان‌تر مشاهده کنیم. در منطق نیز روش‌های استنتاج دیگر اصالت نخواهند داشت. روش‌های متداول استنتاج منطقی تنها وسیله‌های مکانیکی برای مشاهدهٔ همانگویی‌ها هستند. ولی این از نظر منطق بی‌اهمیت است، گزاره‌های مقدمه و نتیجه از نظر منطق یکسانند، همه همانگویی هستند. از اینجا ویتگنشتاین می‌گوید که آن قانون‌های بنیادین استنتاج که فرگه صورت‌بندی نموده است ربطی به گوهر منطق ندارند. در منطق قانون‌های بنیادین و بنیادین تر نداریم. همهٔ گزاره‌های منطق از یک مرتبه هستند.

ویتگنشتاین از منطق‌گرایی راسل نیز انتقاد می‌کند. او می‌گوید ما در منطق به دنبال کلیت‌های گوهرین هستیم که راستی‌شان به خاطر خواص صوری زبان است، این کلیت‌ها تابع بوده‌های جهان نیستند که راستی‌شان راستی تصادفی است. به این ترتیب نظریهٔ کلاس‌ها دیگر در منطق به کلی زاید است. زیرا این نظریه برای برپایی خود، دو اصل بی‌نهایت و کاهش‌پذیری را به کار می‌گیرد. برآیند اصل بی‌نهایت آن است که ما بی‌نهایت شیء از type صفر داریم. این اصل برای بی پایانی اعداد طبیعی لازم است. اصل کاهش‌پذیری می‌گوید که برای اشیای داده شدهٔ یک type، به اندازهٔ کافی خواص برای آن اشیاء داریم که بدون سخن گفتن از «تمام خواص آن اشیا» قابل تعریف‌اند. راسل برای اثبات تمامیت اعداد حقیقی نیازمند این اصل است. این اصل‌ها بر فرض که درست باشند کلیت‌شان تصادفی است[2] نه گوهرین[3]. راستی آنها از صورت آنها برنمی‌آید. ولی ما در منطق به دنبال کلیت‌های گوهرین هستیم. بنابراین نظریهٔ

1) pseudo-proposition 2) accidental generality 3) essential gen.

کلاس‌های راسل برای برنامهٔ منطق‌گرایی مفید نخواهد بود. اما باید توجه نمود که این پایان داستان نیست، با کنارگذاشتن نظریهٔ کلاس‌های راسل انگیزه‌های پشت آن هنوز برجاست. به خصوص مسألهٔ تبیین منطقانهٔ اعداد طبیعی. ویتگنشتاین باید یک تبیین بدیل از اعداد طبیعی ارائه دهد.

ارائهٔ ویتگنشتاین از حساب بر حسب منطق بر پایهٔ مفهوم عمل صورت می‌گیرد. برای عمل فهم تفاوت آن با تابع دارای اهمیت است. هر تابع همراه دامنهٔ تعریف خود تعریف می‌گردد. ولی عمل چنین نیست، یک عمل خود هیچ صورتی را مشخص نمی‌کند بلکه تنها تفاوت میان صورت‌های مبنا و نتیجه را نمایش می‌دهد. به عنوان مثال ما دیگر یک تابع همانی عمومی نخواهیم داشت بلکه برای هر نوع تابع‌های همانی جداگانه داریم ولی ما یک عمل همانی یگانه داریم. عمل مفهومی تصمیم گرایانه است و تابع مفهومی توسیع‌گرایانه.

یک عمل در تناظر با یک سلسلهٔ صوری است. یک سلسلهٔ صوری با روابط صوری میان جمله‌هایش مرتب می‌شود. مانند سلسلهٔ صوری $a, O'a, O'O'a, \ldots$. در این سلسله ما توسط عمل O از یک جمله به تالی آن گذر می‌کنیم. آغاز داستان چنانکه گذشت از دوگانهٔ گفتن-نمایش است. ویتگنشتاین می‌گوید که خواص صوری و نسبت‌های صوری میان وضعیت‌ها گفتنی نیست بلکه تنها نمایش دادنی است. بنابراین در زبان هیچ نمادی به ازای شبه مفهوم‌ها مانند گزاره و عدد نیست. آنها نام‌های اشیای جهان نیستند بلکه به ازای یک سلسلهٔ صوری می‌توانند ارائه شوند. نمایش سلسلهٔ صوری با متغیر جمله عمومی آن صورت می‌گیرد. بنابراین اگر یک سلسلهٔ صوری از به کارگیری متوالی عمل O ساخته شود جملهٔ عمومی آن به صورت $[a, x, O'x]$است. به عنوان مثال صورت کلی گزاره $[p, \xi, N(\xi)]$ است که در آن p گزاره‌های اتمی و N عمل نایش است، یعنی $N(p) = \neg p$ و $N(p, q) = \neg p \wedge \neg q$ و به همین ترتیب.

به خصوص ویتگنشتاین حساب را نیز بر این شالوده می‌سازد، به طور شهودی، یک عدد طبیعی برابر تعداد مرتبه‌هایی که یک عمل به صورت متوالی به کارگرفته می‌شود تعریف می‌گردد. به بیان دقیق‌تر، اگر عمل Ω را داشته باشیم آن گاه تعریف‌های زیر را ترتیب می‌دهیم:

$$x = \Omega^{۰} x \,\text{Def.}$$
$$\Omega'\Omega^{v} x = \Omega^{v+۱} x \,\text{Def.}$$

بنابراین سری صوری $x, \Omega'x, \Omega'\Omega'x, \Omega'\Omega'\Omega'x, \ldots$ را به صورت $\Omega^{۰\,\prime}x, \Omega^{۰+۱\,\prime}x, \Omega^{۰+۱+۱\,\prime}x, \ldots$ خواهیم نوشت (علامت $+$ معنای جبری ندارد) و بار دیگر می‌توانیم تعریف کنیم:

$$0 + ۱ = ۱ \ \text{Def.}$$
$$0 + ۱ + ۱ = ۲ \ \text{Def.}$$

به این ترتیب یک عدد عبارت است از توان یک عمل. از اینجا همهٔ قضایای نظریهٔ اعداد به قضایایی در نظریهٔ عمل کاهش خواهد یافت. به عنوان مثال برهان ویتگنشتاین برای $۲ * ۲ = ۴$ را در (6.241)

ببینید. این برهان از سوی دیگر نمونه‌ای است از برهان ریاضی که دیدگاه ویتگنشتاین را درباره ماهیت برهان ریاضی نشان می‌دهد.

مفهوم عدد، عدد متغیر است، صورت مشترک همه عددها، و این از منظر دعوای دامنه‌دار میان تصمیم‌گران و توسیع‌گرایان نیز دارای اهمیت است. بنابراین می‌شود گفت ویتگنشتاین در انتخاب میان تصمیم‌گرایی و توسیع‌گرایی، تصمیم‌گرا است.

ویتگنشتاین در دوران گذار بیشتر از هر زمانی به مبانی ریاضیات توجه نمود. او در این دوره نزد وایزمن و رمزی و دیگران هم‌فکری‌های جدی در مسایل مختلف مبانی ریاضیات داشت. عموماً او را در این دوره ساخت‌گرا می‌دانند، گرایشی که در دهه ۳۰ موقعیت بهتر را از آن خود کرد (به رغم فریادهای هیلبرت). در این دوره ساخت‌گرایی پخته‌تر شد و پیکره‌بندی بهتری یافت که ما گرایش‌هایی چون شهودگرایی و انواع متناهی‌گرایی را می‌بینیم. اما می‌توان از اندیشه‌های اولیه سخن گفت که در هنگام طرح‌شدن نظریهٔ مجموعه‌های کانتور در برابر آن ظهور کرد. به خصوص کرونه‌کر را نخستین کسی می‌دانند که در برابر کانتور با استدلالی ساخت‌گرایانه ایستاد. او در نامه‌اش به کانتور می‌گوید: «این یک اشتباه عجیب بعضی از ریاضی‌دانان است که می‌اندیشند چیزهایی از ریاضیات می‌تواند توسط نقادی مبانی حذف شود. ... وقتی چیزی محاسبه شد، نمی‌توان آن را حذف و ناپدید کرد. درواقع آنچه توسط این نقادی ناپدید می‌گردد نام‌ها و نمادها است که در حساب آورده شده‌اند ....» ویتگنشتاین نیز به همین شیوه استدلال می‌کند. مفاهیم کلیدی فلسفهٔ او در این دوره مفاهیم «حساب[1]» و «نثر[2]» است. او می‌گوید ریاضیات حساب است از همان نوع که از چرتکه انتظار داریم. در ریاضیات ارقام و نمادها جایگاه مهره‌های چرتکه را می‌گیرند. نمادها ریاضیات را بازنمایی نمی‌کنند بلکه آن را اجرا می‌کنند[3]. ولی ممکن است (بلکه ناگزیر است) که برای ساختن الگوریتم‌های ریاضی از نام‌ها وکلمات استفاده شود که ما را نسبت به ماهیت حساب‌وار ریاضیات به شک اندازد و ما تصور کنیم که ریاضیات از اشیا سخن می‌گویند. ویتگنشتاین این کلمات را «نثر» می‌نامد. به این ترتیب دیگر مسألهٔ مبانی ریاضیات حل می‌شود، یعنی ناپدید می‌گردد. زیرا آنچه در نقادی مبانی به صحنه می‌آیند و می‌روند نام‌ها و نمادها است که ربطی به گوهر ریاضیات ندارند.

مفهوم «حساب» ویتگنشتاین و «الگوریتم» کرونه‌کر نشان از دیدگاه‌های نزدیک آن دو دربارهٔ ماهیت ریاضیات دارد. اینکه آنچه در ریاضیات اهمیت دارد به‌دست آوردن فرمول است و نه چیز دیگر.

گوهر ساخت‌گرا را، به رغم گرایش‌های متعدد آن، می‌توان تصمیم‌گرایی دانست که در برابر توسیع‌گرایی به میان می‌آید. توسیع‌گرایی بخش جدایی‌ناپذیر ارائه‌های اصل موضوعی از ریاضیات است، این ارائه‌ها برآنند که ریاضیات یک ساختار از پیش موجود را بازنمایی می‌کند، مانند فرگه، کانتور، هیلبرت، راسل و رمزی.

توسیع‌گرایی را می‌توان در تطور مفهوم تابع در قرن ۱۹ دنبال کرد. دیریشله مشاهده کرد که نتایج او در مورد تابع‌ها بر جای خواهد بود اگر به جای تابع به مثابهٔ آنچه که توسط فرمول بیان می‌شود، مفهوم تابع به مثابهٔ نمودار را در نظر بگیریم، یعنی دیفرانسیل‌پذیری و دیگر خواص آن را کنار گذاریم. ریمان و دده کیند

1) calculus 2) prose 3) Signs do mathematics

و وبر در ترویج این دید دربارهٔ تابع مؤثر بودند و سرانجام از میان این کوشش‌ها نظریهٔ مجموعه‌های کانتور و مفهوم تابع به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب سربرآورد. چنانکه گفته شد کرونه‌کر در برابر این گرایش ایستاد و اندیشه‌های او در دههٔ ۳۰ به صورت ریاضیات ساخت‌گرا متحول شد، مانند نظریهٔ محاسبه پذیری، تابع‌های بازگشتی و حساب λی چرچ. ویتگنشتاین نیز در برابر مفهوم دیریشله‌ای تابع قرار می‌گیرد. به عقیدهٔ او این مفهوم از تابع وقتی دارای معنا است که ما بتوانیم یک گسترش[1] یا به گفتهٔ ویتگنشتاین یک «جدول[2]» برای آن تابع بسازیم که این در موارد نامتناهی شدنی نیست. بلکه آنچه در ریاضیات با آن سر و کار داریم فرمول و «قاعده[3]» است که با جدول متفاوت است. قاعده و فرمول مفاهیمی تصمیم‌گرایانه است. حتی بیشتر، می‌توان اندیشه‌های اساسی حساب λی چرچ را در مفهوم عمل جستجوکرد (نگاه کنید به Marion).

ضدـتوسیع‌گرایی ویتگنشتاین از نوع رادیکال آن است. او می‌گوید ریاضی‌دان خالق است و نه کاشف. ریاضیات چیزی را بازنمایی نمی‌کند بلکه ما ریاضیات را ایجاد می‌کنیم[4].

اندیشه‌های ویتگنشتاین دربارهٔ مبانی ریاضیات بی‌شک زمینهٔ جالبی برای بررسی است. سخنان او در این باره بیش از کلی‌گویی است. او دربارهٔ اعداد طبیعی، اعداد حقیقی، مسالهٔ پیوستار، سور، قانون طرد شق ثالث و از این قبیل سخن رانده است. اما داوری دربارهٔ آنچه او می گوید آسان نیست. مهم آن است که در طرح انبوه مکتب‌ها و گرایش‌ها منطق متفاوت ویتگنشتاین فراموش نشود. ترکتتوس بر آن است که در فلسفه نمی‌تواند نظریه‌پردازی صورت گیرد، فلسفه یک فعالیت است. بنابراین دیگر نمی‌توان از نظریهٔ تصویری ترکتتوس درباره معنا سخن گفت. خود او نیز ترکتتوس را همانند یک نردبان می‌داند که وقتی از آن فراز آمدیم آن را کنار می‌گذاریم. یا وقتی که گفته می‌شود ویتگنشتاین دورهٔ گذار «ریاضیات» را «حساب» می‌داند باید فضای فلسفهٔ متأخر او لحاظ شود. چراکه کاربرد کلمه‌های «ریاضیات» و «حساب» در بازی‌های زبانی مختلف کاملاً یکسان نیست. این‌گونه سخنان ویتگنشتاین بخشی از «بازنمایی» او از «ریاضیات» است و نباید در آن نظریهٔ خاصی را جستجوکرد. با این حال بسیاری از نویسندگان بی‌توجه به این مسأله بسیار تمایل دارند که ویتگنشتاین را در قالب دعواهای متداول مبانی ریاضیات کاهش دهند، به عنوان مثال ترکتتوس را در چهارچوب اتمیسم منطقی راسل تفسیرکنند یا که جایی دیگر او را یک ساخت‌گرا بنامند. این داوری‌ها چندان هم دور از انتظار نیست و شاید از دوگانگی میان ادبیات پژوهشی موجود در مبانی ریاضیات و ادبیات ویتگنشتاینی سرچشمه بگیرد. نوشتهٔ ما نیز از این مستثنا نیست، هرچند که تلاش شده است میان این دو یک نسبت دیالکتیکی برقرار شود.

سپاسگزاری: این نوشته بر مبنای پژوهشی شکل گرفته است که این جانب با راهنمایی **دکتر محمد اردشیر** درباره فلسفه ریاضیات ویتگنشتاین انجام داده‌ام. لازم است که از ایشان به خاطر راهنمایی‌هایشان در این زمینه و نیز به خاطر آموزش‌های ارزشمندشان درکلیّت مبانی ریاضیات تشکرکنم.

1) extention 2) list 3) rule 4) We make mathematics

یادداشت‌ها

(۱) در این باره سخن خواهیم گفت که اصطلاح نظریه اصلاً نا-ویتگنشتاینی است.

(۲) مثال معروف برای بازنمایی راسل: «پادشاه کنونی فرانسه هوشمند است». این جمله از دیدگاه منطق یک گزاره نیست بلکه فشردهٔ چند گزاره است: ۱ـ یک پادشاه فرانسه وجود دارد. ۲ـ تنها یک پادشاه فرانسه وجود دارد. ۳ـ هر کس که پادشاه فرانسه است هوشمند است.

(۳) تبارشناسی ترکتوس ما را به منابع دیگری چون شوپنهاور و داستایوسکی نیز پیوند می‌دهد. این نیز دارای اهمیت است که بدانیم ویتگنشتاین به سنت فیلسوفان رمانتیک نیز پیوند می‌خورد همچنانکه به فیلسوفان تحلیلی.

(۴) این شبیه‌سازی برای ترکتوس از سوی بعضی از نویسندگان (مانند Crayling) ارائه شده است و بیش از این نباید از آن انتظار داشت زیرا دقیق نیست و قدرت تبیین کافی ندارد. ما در اینجا به آن نمی‌پردازیم.

(۵) ولی با این حال ویتگنشتاین در ترکتوس نظریه‌پردازی می‌کند. خود او نیز بر این وضعیت تناقض‌آمیز آگاه است، به همین خاطر در پایان می‌گوید که ترکتوس یک نردبان است که وقتی از آن گذشتیم آن را کنار می‌گذاریم.

(۶) ویتگنشتاین در این باره به اندازهٔ کافی بحث می‌کند که «این همانی»ها[1] مانند $a = a$ گزاره‌های معنادار نیستند. $a = a$ هیچ وضعیت چیزی را نمی‌نگارد. این همانی شیء با نام a تنها نمایش دادنی است و از خود نگارش a بر می‌آید. این موضوع همچنین مبنای انتقاد دیگری است از ویتگنشتاین بر راسل. او می‌گوید موردهایی پیش می‌آید که ما وسوسه می‌شویم عبارت‌هایی چون $a = a$ را به کار ببریم. مشخصاً هنگامی که بخواهیم درباره شبه‌مفهوم‌ها چون «شیء»، «گزاره» و . . . سخن بگوییم. ولی از شبه‌مفهوم‌ها نمی‌توان توسط گزاره‌ها سخن گفت. بنابراین رشتهٔ «هیچ شیء وجود ندارد» بی معنا است. راسل این را درنیافته است و برای آن شبه‌گزاره نمادگذاری $\neg(\exists x).x = x$ را به کار برده است. اما گذشته از همه چیز (حتی اگر آن یک گزاره باشد) آیا آن گزاره باز هم راست نمی‌بود اگر در واقع اشیایی وجود می‌داشتند که با خود این همان نمی‌بودند؟ راسل این انتقاد را می‌پذیرد.

1) Identity

مراجع

[۱] رسالهٔ منطقی-فلسفی ویتگنشتاین، ترجمه دکتر م. ادیب سلطانی، انتشارات امیرکبیر ۱۳۷۱

[2] Wittgenstein. L. ,Tractatus Logico-Philosophicus, English version by D. F. Pears & B. F. McGuinness, Routledge & Kegan Paul Ltd. 1974.

[3] Wittgenstein L., Remarks on the Foundations of Mathematics, English Version by (reprinfed 1989). G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell Oxford 1978

[4] Marion M. , Wittgenstein, Finitism and the Foundations of Mathematics, Clarendon Press Oxford 1998.

[5] Grayling A. C. , Wittgenstein, Oxford University Press 1988.

[6] Frege G., the Foundations of Arithmatic, English Version by J. L. Austin, M. A. Northwestern University Press, Evanston Illinois 198 (reprinter 1996).

[7] Dummett M. , the seas of Language, Oxford University Press 1993.

[8] Körner S., the philosophy of Mathematics, An introductory essay, Dover Publications 1968.

عبدالحسین امینی شارستانی

دانشگاه صنعتی شریف، گروه فلسفه،

پست الکترونیک: amini_a@mehr.sharif.edu