فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۷(پاییز ۱۳۸۰)، صص. ۱۵ تا ۳۶

رویکردهایی به مسألهٔ تعداد توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی: از منظر مشبّکه

حسین خورشیدی

چکیده

متن حاضر بخشی از یک تحقیق موضوعی پیرامون مسئلهٔ شمارش توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی است که شامل: ویژگی‌های مشبکهٔ توپولوژی‌ها، خواص توپولوژی‌های AT (اصلی)، معادل بودن این مسئله باشمارش پیش‌ترتیب‌ها روی n نقطه، نحوهٔ ارتباط مفاهیم توپولوژیکی روی یک مجموعهٔ متناهی و نتایج به دست آمده برای $n \leq ۱۶$ می‌باشد. متن از لحاظ مفاهیم توپولوژیکی خودکفا است.

۱ مقدمه

یافتن تعداد توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی از آن دسته مسائلی است که طراحی آن نیاز به اطلاعات عمیق ندارد وهر شخص مبتدی ممکن است با این سؤال مواجه شود اما، پاسخگویی به آن چنان دشواراست که تاکنون (زمان نگارش این مقاله) فرمول صریحی برای تعیین آن به دست نیامده است؛ البته روابط نویدبخشی یافت شده که برخی از آنها ([۲۱] و [۱۷]) را ذکر خواهیم نمود. چنانچه این شمارش با تفکیک توپولوژی‌های هومئومورف باشد آن را شمارش توپولوژی‌های باانگ[۱] ودر صورت یکی دانستن توپولوژی‌های هومئومورف آن را شمارش توپولوژی‌های بی‌انگ[۲] می‌نامند.[۳]

1) labeled 2) unlabeled

۳) در اینجا واژهٔ «انگ» بر واژهٔ «نشان» ترجیح داده شده است زیرا عبارت نامصطلح «نشان زدن» معنی «برچسب زدن» را نمی‌رساند.

در اینجا حاصل بیش از ۸ سال تلاش[1] و جستجوی نگارنده برای درک این موضوع، که تقریباً در بین تمامی بزرگان ریاضی ایران مهجور مانده و گواه آن سمینارها و کنفرانسهای داخلی است، ارائه می‌شود. به سبب حجم زیاد، به ناچار مطالب به دو قسمت: «ازمنظرمشبکه» و «الگوریتمها و اعداد» تقسیم شده است. در قسمت دوم (که در حال تدوین است) الگوریتمهایی که ازسال ۱۹۶۶ (نخستین مقالات) تا سال ۲۰۰۰ بوجود آمده مورد بررسی قرار خواهد گرفت؛ اما پیش از آن شایسته است دیدگاه خود را وسعت داده از منظری زیباتر به موضوع بنگریم تا ساختار توپولوژی‌ها و روابط آنها با یکدیگر را مشاهده کرده، علاوه بر یافتن صورتی معادل برای مسئلهٔ فوق، شیوه‌ای متفاوت برای ارتباط با گستره‌ای از مفاهیم توپولوژیکی به دست آوریم. گفتنی است که رویکردهای دیگری مانند «تقریبهای مجانبی» و «گراف و ترکیبیات» نیز می‌توانند در نظر گرفته شوند. اما در باب رفتار مجانبی، تنها علاقه‌مندان را به [۳]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۲۶]، [۲۷] و [۲۸] ارجاع می‌دهیم. درخصوص گراف و ترکیبیات هرچند مسئلهٔ فوق با مسئلهٔ تعیین تعداد گرافهای جهت‌دار بازتابی و ترایایی[2] روی n نقطه معادل است و نگارنده جایگاه اصلی مسئله را در وادی ترکیبیات می‌داند اما ترجیح می‌دهد دست همکاری به سوی متخصصین این فن درازکرده متواضعانه، ایده‌های خود را که ظاهراً هنوز بکرند در محضرشان ابراز نماید. در هر حال مطالعهٔ [۶] و [۷] به جهت نگاهی که به گرافها دارند می‌تواند مفید باشد و مفاهیمی که در بخش ۴ دربارهٔ ترتیب‌ها بیان شده به نوعی همان مفاهیم نظریهٔ گراف هستند. در جای‌جای متن حاضر و مقالهٔ دیگر (الگوریتم‌ها) در حدّ توان، توشه‌ای از ترکیبیات برخواهیم گرفت.

از آنجا که تسریع و تسهیل در فهم و تا حد امکان اشراف بر موضوع در ضمنِ اختصار، مبنای اصلی در نگارش می‌باشد لذا از بیان اثبات اکثر قضایا صرف نظر شده است و به جای آن، بی‌نیاز نمودن خواننده از جستجوی تعاریف (که گاه منجر به مکاتباتی با نویسندگان مقالات می‌شود) ترجیح داده شده است.

در بخش بعدی نتایجی را که در مشبکهٔ توپولوژی‌ها به دست آمده مرور می‌کنیم و در بخش ۳ نکاتی را دربارهٔ توپولوژی‌های AT (اصلی) خواهیم دید. در بخش ۴ صورت معادل مسئلهٔ فوق (یعنی تعیین تعداد پیش‌ترتیب‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی) ونیز ارتباط مفاهیم توپولوژیکی با یکدیگر و با مفاهیم متناظرشان در نظریهٔ ترتیب[3] را مشاهده می‌کنیم. ضمناً جوابهای به دست آمده برای $n \leqslant ۱۶$ با ذکر نام پدیدآورندگان، در این بخش ارائه خواهند شد (جدول ۲).

برای آنکه متن از لحاظ مفاهیم توپولوژیکی خودکفا باشد تعاریف زیر را ارائه می‌کنیم:

۱.۱ تعریف: فرض کنیم X یک مجموعه باشد. خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X را با $P(X)$ نمایش می‌دهیم. گردایهٔ τ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X می‌نامیم هرگاه:

---

۱) نگارنده بخشی از مطالبی که در این مورد به دست آمده، حتی برخی از آنچه که در سال ۲۰۰۰ به چاپ رسیده است، در نخستین سال بررسی‌اش مشاهده کرد اما ازآنجا که «بی مایه فطیر است» هفت سال بقیه را به ناچار صرف جمع‌آوری منابع نمود وتنها سه مقاله را در داخل کشور یافت!

2) reflexive & trasitive digraphs 3) order theory

- X و $\varnothing$ عضو τ باشند؛
- اجتماع دلخواه از اعضای τ ، عضو τ باشد؛
- اشتراک تعداد متناهی از اعضای τ ، عضو τ باشد.

مقصود از فضای توپولوژیک X، مجموعهٔ X است که یک توپولوژی روی آن در نظر گرفته شده باشد.

از تعریف فوق معلوم است که $\tau \in P(P(X))$ و اگر X یک مجموعهٔ n عضوی باشد آنگاه $|P(X)| = ۲^n$ و $|P(P(X))| = ۲^{۲^n}$. لذا بزرگترین مشکل در بررسی این مسئله را می‌توان رشد سریع اعداد و نیز کوچک بودن دامنهٔ حالتهای مطلوب در مقایسه با حالتهای ناخواسته دانست؛ به‌عنوان مثال، اگر $n = ۳$ آنگاه از بین $۲^{۲^۳}$ حالت، تنها ۲۹ توپولوژی وجود دارد.

۲.۱ تعریف: اگر τ یک توپولوژی روی X باشد، هر عضو τ را یک مجموعهٔ بازگوییم. یک زیرمجموعه از X را بسته گوییم هرگاه متممش باز باشد. اشتراک همهٔ مجموعه‌های بستهٔ شامل یک مجموعهٔ خاص را بستار آن مجموعه نامیم.

بدیهی است که باز و یا بسته بودن یک زیرمجموعه کاملاً بستگی به τ دارد.

۳.۱ تعریف: اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند تابع $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گوییم هرگاه برای هر باز V از Y، $f^{-۱}(V)$ در X باز باشد. دو فضای X و Y را هومئومورف گوییم هرگاه تابعی $f : X \longrightarrow Y$ موجود باشد به قسمی که f یک به یک، پوشا و پیوسته و $f^{-۱}$ نیز پیوسته باشد.

۴.۱ تعریف: فرض کنیم τ یک توپولوژی روی X باشد. مجموعهٔ β شامل بازهایی از τ را یک پایه[1] برای τ نامیم هرگاه هر مجموعهٔ باز، اجتماعی ازمجموعه‌های عضو β باشد.

۵.۱ تعریف: اگر S گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، توپولوژی پدید آمده توسط S، گردایه‌ای است متشکل از همهٔ اجتماعهای مقاطع متناهی اعضای S.

۲ مشبکهٔ توپولوژی‌ها

ابتدا تعاریفی از نظریهٔ مشبکه را مرور می‌کنیم:

۱.۲ تعریف:

۱ـ مجموعهٔ جزئاً مرتب $(L, \leqslant)$ را یک مشبّکه[2] گوییم هرگاه هر دو عضو مجموعه، بزرگترین کران پایین (یا رسند[3])، وکوچکترین کران بالا (یا وست[4])، داشته باشند. رسند دو عضو a و b را با نماد $a \wedge b$ و وست آنها را با $a \vee b$ نمایش می‌دهیم.

1) basis 2) lattice 3) meet 4) join

۲ـ مشبکهٔ $(L, \leqslant)$ را کامل[1] گوییم هرگاه هر زیرمجموعه‌اش دارای رسند و وست در L باشد.

۳ـ مشبکهٔ $(L, \geqslant)$ رادوگانِ[2] مشبکهٔ $(L, \leqslant)$ می‌نامیم. در واقع اگر $(L, \leqslant)$ را یک گراف جهت دار تصور کنیم دوگان آن با عکس کردن جهت‌ها به دست می‌آید.

۴ـ $(A, \leqslant)$ رازیرمشبکهٔ $(L, \leqslant)$ گوییم هرگاه $A \subseteq L$ و A رسندها و وستهای تعداد متناهی از عناصرش را در بر گیرد. زیرمشبکه کامل است اگر رسندها و وستهای تعداد دلخواه از عناصرش را شامل باشد.

۵ـ در مشبکهٔ $(L, \leqslant)$ عبارت «a ، b را می‌پوشاند» به معنای آن است که $b \leqslant a$ و اگر $b \leqslant c \leqslant a$ آنگاه $a = c$ یا $b = c$.

۶ـ کوچکترین عضو مشبکه با نماد 0 و بزرگترین عضو آن با نماد 1 نشان داده می‌شود.

۷ـ در مشبکه، یک اتم عضوی است که 0 رامی‌پوشاند.

۸ـ مشبکهٔ اتمی مشبکه‌ای است که هر عضو آن به غیر از 0 را بتوان به صورت وست اتم‌ها نوشت.

۹ـ در مشبکه، یک پادـاتم عضوی است که بوسیلهٔ 1 پوشانده می‌شود.

۱۰ـ مشبکهٔ پادـاتمی مشبکه‌ای است که هر عضو آن به غیر از 1 را بتوان به صورت رسند پادـاتمها نوشت.

۱۱ـ در یک مشبکه، عضو a را متمم[3] عضو b گوییم هرگاه $a \wedge b = 0$ و $a \vee b = 1$.

۱۲ـ مشبکه را متمم‌دار[4] گوییم هر گاه هر عضو آن دست کم یک متمم داشته باشد.

۱۳ـ مشبکه را توزیع‌پذیر[5] گوییم هر گاه برای هر a و b و c در آن

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad , \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

۱۴ـ مشبکه را مدولار[6] گوییم هرگاه $a \leqslant c$ ایجاب کند که $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

۱۵ـ نگاشتی از مشبکهٔ L به مشبکهٔ K را یک همریختی مشبکه[7] گوییم هرگاه رسندها و وستهای متناهی تحت آن حفظ شوند.

۱۶ـ یک همریختی مشبکه رایکریختی[8] گوییم هرگاه یک به یک و برو باشد. هر یکریختی از L به L را خودریختی[9] نامیم.

۱۷ـ مشبکهٔ $(L, \leqslant)$ رادوگانِ خود[10] گوییم هرگاه با مشبکهٔ $(L, \geqslant)$ یکریخت باشد.

1) complete 2) dual 3) complement 4) complemented 5) distributive 6) modular
7) lattice homomorphism 8) isomorphism 9) automorphism 10) self-dual

اکنون توپولوژی‌های مربوط به یک مجموعه را با توجه به مفاهیم فوق بررسی می‌کنیم. فرض کنیم که X یک مجموعه باشد، قرار می‌دهیم $Top(X) = \{\tau |$ است X یک توپولوژی روی $\tau\}$. ضمناً خاطرنشان می‌کنیم که مقصود از توپولوژی ناگسسته[1] و توپولوژی گسسته[2] به ترتیب $\{\varnothing, X\}$ و $P(X)$ می‌باشد.

۲.۲ قضیه: $Top(X)$ با رابطهٔ زیرمجموعه بودن یک مشبکهٔ کامل است. کوچکترین عضو آن توپولوژی ناگسسته و بزرگترین عضوش توپولوژی گسسته است. کوچکترین کران بالای دو توپولوژی τ و τ' توپولوژی پدید آمده توسط $\{G\cap G' | G\in\tau, G'\in\tau'\}$ و بزرگترین کران پایین آنها $\tau\cap\tau'$ می‌باشد. [۵]

۳.۲ قضیه: $Top(X)$ یک مشبکهٔ اتمی است. اتمها، توپولوژی‌هایی به شکل $\{\varnothing, G, X\}$ هستند که $\varnothing \subsetneq G \subsetneq X$. اگر $|X| = n$ آنگاه $Top(X)$ دارای $۲^n - ۲$ اتم است واگر X نامتناهی باشد آنگاه $Top(X)$ دارای $۲^{|X|}$ اتم می‌باشد. [۴۳]

قضیهٔ بعدی نیازمند چند تعریف است.

۴.۲ تعریف: اگر F خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد $\mathscr{F}$ رایک پالایه[3] می‌نامیم هرگاه دارای سه شرط زیر باشد:

- اگر $A, B \in \mathscr{F}$ آنگاه $A\cap B\in\mathscr{F}$ ؛
- اگر $A\in\mathscr{F}$ و $A\subseteq B\subseteq X$ آنگاه $B\in\mathscr{F}$ ؛
- $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

پالایهٔ $\mathscr{F}$ را اصلی[4] گوییم هرگاه زیر مجموعهٔ ناتهی A از X موجود باشد که برای هر $B\in\mathscr{F}$ داشته باشیم $A\subseteq B$. مثال برای پالایه‌های اصلی را به‌سادگی می‌توان ساخت. مثالی از یک پالایه که اصلی نباشد خانوادهٔ $\mathscr{F} = \{E_n\}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ است که $E_n = [n, +\infty)$ ، $n\in\mathbb{N}$.

۵.۲ تعریف: یک پالایه روی X را فراپالایه[5] می‌نامیم هرگاه به طور سره مشمول هیچ پالایه‌ای در X نباشد، به عبارت دیگر یک پالایهٔ ماکسیمال باشد.

۶.۲ تعریف: اگر $\mathcal{U}$ یک فراپالایه روی X باشد و $x\in X$ به طوری که $x\notin \bigcap\mathcal{U}$ در این صورت توپولوژی $\tau(x,\mathcal{U}) = \{G |\ x\notin G$ یا $G\in\mathcal{U}\}$ را یک فراتوپولوژی[6] می‌نامیم و اگر $\mathcal{U}$ فراپالایهٔ اصلی باشد آن را فراتوپولوژی اصلی[7] گوییم.

1) indiscrete 2) discrete 3) filter 4) principal 5) ultrafilter 6) ultratopology
7) principal ultratopology

با اندک تأملی معلوم می‌شود که باانتخاب x، تمام تک عضوی‌ها غیر از $\{x\}$ بازند وهر مجموعه‌ای که شامل x باشد درصورتی باز است که عضو $\mathcal{U}$ باشد. دربخش بعدی ساختار این توپولوژی‌ها را بیشتر بررسی می‌کنیم.

۷.۲ قضیه: $Top(X)$ یک مشبکهٔ پاد-اتمی است. پاد-اتمها، فراتوپولوژی هستند. اگر $|X| = n$ آنگاه $Top(X)$ دارای $n(n-۱)$ پاد-اتم است واگر X نامتناهی باشد$Top(X)$ دارای $۲^{۲^{|X|}}$ پاد-اتم می‌باشد. [۲۲]

در بین تمام سؤالاتی که دربارهٔ ساختار مشبکه‌ای $Top(X)$ مطرح شده، به نظر می‌رسد که مسئلهٔ متمم‌گیری[1]، در بین توپولوژی‌دان‌ها، بیشترین توجه را به خود جلب نموده باشد اما برای رعایت اختصار به چند قضیهٔ زیر بسنده می‌کنیم.

۸.۲ قضیه: $Top(X)$ متمم‌دار است. [۴۰][۴۴]

۹.۲ قضیه: تعداد متممهای یک توپولوژی روی n نقطه، مگر در چند حالت خاص، حداقل ۲^n است. [۷]

۱۰.۲ قضیه: اگر X نامتناهی باشد هر توپولوژی در $Top(X)$ ، به غیر از توپولوژی‌های گسسته و ناگسسته، دست کم دارای $|X|$ متمم در $Top(X)$ است. [۳۶]

۱۱.۲ قضیه: اگر X نامتناهی باشد، آنگاه زیرمجموعه‌ای از $Top(X)$ باعدد اصلی $|X|$ وجود دارد به طوری که هر دو عضو آن زیرمجموعه، متمم یکدیگرند. [۱]

حال به سایر مفاهیم تعریف ۱.۲ می‌پردازیم. دو قضیهٔ زیر تا حدی پیچیدگی ساختار $Top(X)$ را آشکار می‌کنند.

۱۲.۲ قضیه: اگر $|X| > ۲$ آنگاه $Top(X)$ توزیع‌پذیر و مدولار نیست. [۴۳][۴۰][۳۰]

قضیهٔ فوق را با مثالی از [۳۰] بهتر می‌توان لمس کرد. فرض کنید $X = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{U}$ یک فراپالایهٔ اصلی از a باشد بنابر تعریف ۶.۲ داریم: $\tau(b, \mathcal{U}(a)) = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$.

1) complementation

حال نمودار زیر را در نظر بگیرید:

نمودار ۱

با توجه به نمودار فوق $\tau_2 \vee (\tau_4 \wedge \tau_3) = \tau_2 \vee \tau_1 = \tau_2$ ، در حالی که

$$(\tau_2 \vee \tau_4) \wedge (\tau_2 \vee \tau_3) = \tau_4 \wedge P(X) = \tau_4$$

پس $Top(X)$ توزیع‌پذیر نیست. به علاوه با وجود این‌که $\tau_4 \leq \tau_2$، اما $\tau_2 \vee (\tau_4 \wedge \tau_3) = \tau_2 \vee \tau_1 = \tau_2$ و $(\tau_2 \vee \tau_3) \wedge \tau_4 = P(X) \wedge \tau_4 = \tau_4$. پس $Top(X)$ مدولار هم نیست.

نکتهٔ جالبی که در مشبکهٔ $Top(X)$ می‌توان مشاهده کرد آن است که بنا بر قضایای ۳.۲ و ۷.۲ اگر X متناهی با بیش از ۳ عضو باشد تعداد اتمهای آن بیش از پاد‌ـ‌اتمهایش می‌باشد در حالی که اگر X نامتناهی باشد عکس این مطلب برقرار است و قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

۱۳.۲ قضیه: اگر $|X| > 3$ آنگاه $Top(X)$ دوگان خود نیست. [۴۰]

تا اینجا اطلاعاتی دربارهٔ ویژگی‌های درونی $Top(X)$ بیان شد. حال ارتباط این مشبکه را با سایر مشبکه‌ها بررسی می‌کنیم.

۱۴.۲ قضیه: برای هر مشبکهٔ L، مجموعه‌ای مانند X وجود دارد به طوری که L را می‌توان در $Top(X)$ نشاند.

این قضیه تعمیمی از قضیهٔ ویتمن[1] است که هر مشبکه را می‌توان در مشبکه‌ای از افرازهای یک مجموعه نشاند. از آنجا که مشبکهٔ همهٔ توپولوژی‌های افرازی[2] روی X، یعنی توپولوژی‌هایی که هریک پایه‌ای دارند که افرازی از مجموعهٔ X است، یک زیرمشبکهٔ کامل از $Top(X)$ را تشکیل می‌دهد و چون بنا بر قضیه‌ای از ری‌برن[3] مشبکهٔ توپولوژی‌های افرازی روی X بادوگان مشبکهٔ همهٔ افرازهای X یکریخت

1) Whitman 2) partition 3) Rayburn

است، نتیجه به دست می‌آید. [۳۱]

۱۵.۲ قضیه: اگر $|X| \neq ۲$ آنگاه $Top(X)$ فقط همریختی مشبکه‌ای بدیهی دارد؛ یعنی هر همریختی مشبکه‌ای از $Top(X)$ بروی یک مشبکهٔ L، یک یکریختی است یا اینکه L تک عضوی است. [۲۳]

۱۶.۲ قضیه: اگر X از یک یا دو عضو تشکیل شده یا نامتناهی باشد آنگاه گروه خودریختی‌های مشبکه‌ای $Top(X)$ باگروه تقارن روی X یکریخت است. اگر X متناهی وبیش از دو عضو داشته باشد آنگاه گروه خودریختی‌های مشبکه‌ای $Top(X)$ با ضرب مستقیم گروه تقارن روی X و $\mathbb{Z}_۲$، یکریخت است. [۲۳][۲۲]

در اثبات قضیهٔ اخیر، هارتمانیز[1] از ساختار اتمی $Top(X)$ استفاده کرد و بعداً فروهلیخ [2] همین قضیه را با استفاده از ساختار پاد-اتمی $Top(X)$ اثبات نمود. این قضیه نتایجی را به دنبال دارد. اگر X نامتناهی و P یک خاصیت توپولوژیکی باشد در این صورت مجموعهٔ توپولوژی‌هایی در $Top(X)$ که خاصیت P را دارند می‌تواند به آسانی از ساختار مشبکه‌ای $Top(X)$ تشخیص داده شود. زیرا بنابر قضیهٔ فوق تنها خودریختی‌های $Top(X)$ برای مجموعهٔ نامتناهی X آنهایی هستند که جای عناصر X را تحت جایگشت عوض می‌کنند. بنابراین هر خودریختی از $Top(X)$ باید توپولوژی‌های $Top(X)$ را به روی توپولوژی‌های هومئومورفشان بنگارد. پس خواص توپولوژیکی اعضای $Top(X)$ از روی موقعیت آنها در مشبکه تعیین می‌شود؛ به عنوان مثال:

۱۷.۲ قضیه: اگر τ یک پاد-اتم در $Top(X)$ باشد، آنگاه τ در اصل $T_۱$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر τ در $Top(X)$ متمم ماکزیمم نداشته باشد.

در قضیهٔ فوق «متمم ماکزیمم» بزرگترین عضو در مجموعهٔ متممهای τ تحت رابطه $\subseteq$ است. برای آگاهی بیشتر از ویژگی‌های مشبکه‌هایی از توپولوژی‌های خاص، علاقه‌مندان را به [۳۱] ارجاع می‌دهیم.

توپولوژی‌های AT (اصلی)

در این بخش نوع خاصی از توپولوژی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در حالت متناهی اهمیت ویژه‌ای می‌یابند. تعریف ۱.۳ به الکساندروف[3] منسوب است و او آن توپولوژی رافضای «گسسته» نامید، اما به جهت آنکه در ۱۹۳۵ الکساندروف و تاکر[4] مستقلاً روشی کلی برای ساختن توپولوژی روی ترتیبهای جزئی ابداع کردند که به این توپولوژی منجر شد، به تبعیت از مرجع [۴۵]، این توپولوژی‌ها را«AT» می‌نامیم.

۱.۳ تعریف: یک توپولوژی را AT گوییم هرگاه اشتراک دلخواه بازهای آن، باز باشد.

1) Hartmanis 2) Fröhlich 3) Alexandrov 4) Tucker

البته ا.ک.استینر[1] ثابت‌کرده است که تعریف فوق با تعریفی که برای یک توپولوژیِ اصلی[2] بیان می‌شود معادل است؛ یک توپولوژی رااصلی گویند هرگاه گسسته باشد یا بتوان آن را به صورت رسند فراتوپولوژی‌های اصلی نوشت. بیشترین نتایجی که دربارهٔ مشبکهٔ این نوع توپولوژی به دست آمده منسوب به وی است ([۴۰] را ببینید). شباهت وانطباق آن با مشبکهٔ $Top(X)$ (بویژه درحالت متناهی) قابل توجه است. در اینجا برخی از این نتایج را ذکر می‌کنیم:

مشبکهٔ توپولوژی‌های AT (اصلی) مشبکه‌ای است کامل که کوچکترین عضو آن توپولوژی ناگسسته و بزرگترین عضوش توپولوژی گسسته است. این مشبکه هم اتمی وهم پاد_اتمی است که اتمهای آن منطبق براتمهای $Top(X)$ می‌باشند. اگرچه این مشبکه، زیرمشبکهٔ $Top(X)$ است اما یک زیر مشبکهٔ کامل نیست. البته اگر X متناهی باشد این دو مشبکه یکی هستند (زیرا اشتراک دلخواه اعضای توپولوژی، منجر به اشتراک تعداد متناهی می‌شود). مشبکهٔ AT_توپولوژی‌ها، متمم‌دار است و اگر $|X| \geqslant ۳$ مدولار نیست و اگر $|X| \geqslant ۴$ دوگان خود نیست. در حالتی که X نامتناهی باشد عدد اصلی این مشبکه $۲^{|X|}$ می‌باشد.

همان‌طور که از تعریف AT_توپولوژی بر می‌آید می‌توان برای هر عضو x از X، کوچکترین همسایگی در نظر گرفت به این صورت که آن را اشتراک تمام بازهای شامل x تعریف کنیم و لذا پایه‌ای که شامل این کوچکترین همسایگی‌ها باشد را می‌توان، به تعبیر [۴۰] و [۳۴]، پایهٔ مینیمال برای AT_توپولوژی مورد نظر دانست. گفتنی است که د.استفن در [۴۱] نیز این ساختار را به کار برده و نشان داده است که تنها توپولوژی روی مجموعهٔ n عضوی که بیش از $۳ \times ۲^{n-۲}$ مجموعهٔ باز دارد توپولوژی گسسته است و به طور ضمنی ثابت کرده که فراتوپولوژی‌ها روی مجموعهٔ n عضوی دقیقاً $۳ \times ۲^{n-۲}$ مجموعهٔ باز دارند. در ادامه این موضوع را به شکل دیگری ثابت می‌کنیم.

حال فرض کنیم X متناهی و دارای n عضو باشد. تمام توپولوژی‌ها روی X، AT هستند پس هر توپولوژی روی X یک پایهٔ مینیمال منحصر بفرد دارد. فرض کنیم β این پایهٔ مینیمال باشد. حال به اعضای β توجه می‌کنیم. اگر تمام اعضای آن تک عضوی باشند آنگاه β، توپولوژی گسسته را پدید می‌آورد. اما اگر β یک توپولوژی سره را تولید کند در این صورت دست کم یکی از اعضای β نباید تک عضوی باشد. بنابراین یک پاد_اتم (یا فراتوپولوژی)، توپولوژیی خواهد بود که پایهٔ مینیمال آن دارای n عضو بوده و تنها یکی از این n عضو، یک مجموعهٔ دوعضوی است و $(n-۱)$ عضو دیگر همگی تک عضوی‌اند، یعنی $\beta_{yz} = \{\{x\}, \{y,z\} : x \in X - \{z\}\}$ که y و z دوعضومتمایز X می‌باشند (توجه کنید که $\{y\} \in \beta_{yz}$). حال اگر فراتوپولوژی متناظر را با τ_{yz} نمایش دهیم باتوجه به انتخابهایی که برای y و z مقدور است تعداد فراتوپولوژی‌ها به‌وضوح $n(n-۱)$ خواهد بود. همچنین اگر $\mathcal{U}(\{y,z\})$ یک فراپالایهٔ اصلی از $\{y,z\}$ باشد خواهیم داشت:

$$\mathcal{U}(\{y,z\}) = \{A | A = \{y,z\} \cup B, B \in P(X - \{y,z\})\}$$

1) A. K. Steiner 2) principal

و لذا
$$\tau_{yz} = P(X - \{z\}) \cup \mathcal{U}(\{y, z\})$$
چون فراتوپولوژی τ_{yz} به صورت اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم نوشته شده است پس:

$$|\tau_{yz}| = ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} = ۲^{n-۲}(۲ + ۱) = ۳ \times ۲^{n-۲}.$$

اکنون در مرحله‌ای هستیم که می‌توانیم رابطهٔ زیر را که در [۲۱] برای تعداد توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ n عضوی اثبات شده و در اصل مربوط به رسالهٔ دکتری فرگ[1] می‌باشد که در ۱۹۸۳ به اتمام رسیده است، ارائه کنیم. توپولوژی τ روی مجموعهٔ ناتهی X را یک توپولوژی طردکننده[2] می‌نامیم هرگاه نقطه‌ای مانند $p \in X$ یافت شود که $p \notin \bigcup\{G : G \in \tau - \{X\}\}$ یا به بیان معادل، هرگاه X کوچکترین همسایگی یک نقطه باشد. این خانواده از توپولوژی‌ها را Eـتوپولوژی می‌نامیم. اگر یک توپولوژی AT جزء این خانواده نباشد دراین صورت پایهٔ مینیمال آن از زیرمجموعه‌های سرهٔ X تشکیل شده است. خانوادهٔ توپولوژی‌هایی که طردکننده نیستند را با $nonE$ـتوپولوژی مشخص می‌کنیم.

۲.۳ قضیه: تعداد همهٔ توپولوژی‌ها روی مجموعهٔ متناهی X_n شامل n نقطه، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$N_n = \sum_{r=۰}^{n-۱} \binom{n}{r} N_r + M_n$$

که $N_۰ = ۱$ و N_r تعداد همهٔ توپولوژی‌ها روی مجموعهٔ X_r است و M_n تعداد همهٔ $nonE$ـتوپولوژی‌ها روی X_n می‌باشد.

برهان: مجموعهٔ X_n دارای $\binom{n}{n-۱}$ زیرمجموعهٔ متمایز $X_{n-۱}$ است که هر $X_{n-۱}$ به صورت $X_n - \{z\}$ برای $z \in X_n$ می‌باشد. اگر β پایهٔ مینیمال توپولوژی τ روی $X_{n-۱}$ باشد آنگاه $\beta^+ = \{U, X_n : U \in \beta\}$ یک پایهٔ مینیمال برای Eـتوپولوژی τ^+ روی X_n است. توجه کنید که $X_{n-۱} \in \tau^+$. بنابراین، باافزودن X_n به پایهٔ مینیمال هر توپولوژی روی $X_{n-۱}$، تعداد $N_{n-۱}$ توپولوژی متمایز روی X_n به دست می‌آید. از آنجا که توپولوژی‌ها روی $X_{n-۱}$ متمایزند، تعداد $\binom{n}{n-۱}N_{n-۱}$ توپولوژی متمایز روی X_n خواهیم داشت. همچنین تعداد $\binom{n}{n-۲}$ زیرمجموعهٔ متمایز $X_{n-۲}$ از X_n موجود است که باافزودن X_n به پایهٔ مینیمال هر توپولوژی روی هر $X_{n-۲}$ می‌توان تعداد $\binom{n}{n-۲}N_{n-۲}$، Eـتوپولوژی متمایز روی X_n به دست آوردکه در هر یک از آنها $X_{n-۲}$ بازاست اما $X_{n-۱}$ باز نیست و همچنان می‌توان این روند را ادامه داد. تعداد $\binom{n}{۲}$ زیرمجموعهٔ متمایز $X_۲$ از X_n موجود است. فرض کنیم $X_۲ = \{x_i, x_j\}$ پس برای توپولوژی‌ها روی $X_۲$ پایه‌های مینیمالِ $\beta_۱ = \{\{x_i\}, \{x_j\}\}$ و $\beta_۲ = \{\{x_i\}, X_۲\}$ و $\beta_۳ = \{X_۲, \{x_j\}\}$ و $\beta_۴ = \{X_۲\}$ را داریم. باافزودن X_n به هر β_k $(k = ۱, ۲, ۳, ۴)$، پایه‌های مینیمالِ $\beta_۱^+ = \{\{x_i\}, \{x_j\}, X_n\}$ و $\beta_۲^+ = \{\{x_i\}, X_۲, X_n\}$ و $\beta_۳^+ = \{X_۲, \{x_j\}, X_n\}$ و $\beta_۴^+ = \{X_۲, X_n\}$ برای Eـتوپولوژی‌ها روی X_n به دست می‌آید که در هر یک $X_۲$ باز است امابرای هر $r \geq ۳$، $X_r \subset X_n$ باز نیست. بنابراین $\binom{n}{۲}N_۲$ توپولوژی متمایز روی

1) Farrag 2) excluding

X_n وجود دارد. بالاخره تعداد $\binom{n}{1}$ زیرمجموعهٔ متمایز X_1 از X_n موجود است که هر یک پایهٔ مینیمال $\beta_1^+ = \{X_1, X_n\}$ را به دست می‌دهد. اگر توپولوژی‌های گسسته و ناگسسته رافراموش نکنیم برهان کامل می‌شود.[۲۱]

در قضیهٔ فوق مشکلی که باقی می‌ماند یافتن M_n است و الگوریتمهایی که در [۲۰] ارائه شده مبتنی بر یافتن تعداد $nonE$ـتوپولوژی‌هایی است که به طور اکید ضعیفتر از یک توپولوژی داده شده هستند و شرایط هم‌ارزی که در [۲۰] اثبات شده این امکان رافراهم می‌سازند.

توپولوژی‌ها و ترتیب‌ها

بیانِ نحوهٔ تناظر توپولوژی‌ها وپیش‌ترتیب‌ها (تعریف ۱.۴) وسپس بررسی ارتباط مفاهیم توپولوژیکی با یکدیگر و با مفاهیم متناظرشان در نظریهٔ ترتیب و در نهایت ارائهٔ آخرین نتایج به دست آمده در این باره محتوای این بخش را تشکیل می‌دهد.

۱.۴ تعریف: یک رابطه روی مجموعهٔ X را پیش‌ترتیب[1] گوییم هرگاه خاصیتهای بازتابی و ترایایی (اما نه لزوماً پاد متقارن) را داشته باشد. پیش‌ترتیب را شبه‌ترتیب[2] نیز می‌نامند.

اگر X یک مجموعه و $\leqslant$ یک پیش‌ترتیب روی آن باشد، الکساندروف و تاکر یک توپولوژی روی X که بوسیلهٔ این پیش‌ترتیب به دست می‌آید را چنین تعریف می‌کنند: برای هر $x \in X$ مجموعهٔ $\{y : x \leq y\}$ باز فرض شود. این توپولوژی یک ATـتوپولوژی است. برعکس، برای هر توپولوژی روی X می‌توان یک پیش‌ترتیب در نظر گرفت؛ اگر τ یک توپولوژی روی X باشد پیش‌ترتیب $\lhd$ روی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \lhd y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\ U \in \tau)[x \in U \Longrightarrow y \in U]$$

این تابع ازتوپولوژی‌ها به پیش‌ترتیب‌ها لزوماً یک به یک نیست؛ در واقع، توپولوژی‌هایی را که یک پیش‌ترتیب خاص را پدید می‌آورند می‌توان در یک کلاس هم‌ارزی قرار داد. در هر کلاس هم‌ارزی دقیقاً یک ATـتوپولوژی وجود دارد. در واقع، ATـتوپولوژی بزرگترین توپولوژی در هر کلاس هم‌ارزی است. بویژه، هرکلاس هم‌ارزی ناتهی است؛ یعنی هر پیش‌ترتیب بوسیلهٔ یک ATـتوپولوژی پدید می‌آید. در واقع، مشبکهٔ توپولوژی‌های AT روی X تحت رابطهٔ $\subseteq$ و مشبکهٔ پیش‌ترتیب‌ها روی X تحت رابطهٔ $\supseteq$ ، به طور کانونی یکریخت هستند. [۲][۳۲][۴۰]

از مطالب بند قبل نتیجه می‌شود که در حالت متناهی مجموعهٔ تمام توپولوژی‌ها روی X (که همگی AT هستند) با مجموعهٔ تمام پیش‌ترتیب‌ها روی X در تناظر یک به یک است.

حال به انواع خاصی از توپولوژی‌ها و روابط آنها با یکدیگر می‌پردازیم. هدف نهایی رسیدن به جدول

1) preorder 2) quasiorder

۱ و نمودار ۲ می‌باشد که در مقالهٔ زیبای [۱۷] ارائه شده است. تعاریف از منابع مختلف جمع‌آوری گردیده وقضایا به منظور روانتر شدن متن به صورت نکاتی در بین تعاریف و نهایتاً در جدول ۱ ذکر شده‌اند.

۲.۴ تعریف: در بندهای زیر که اصول جداسازی[1] نیز نامیده می‌شوند مقصود از فضا یک فضای توپولوژیک است و مقصود از همسایگیِ یک نقطه (یک مجموعه)، مجموعهٔ بازی شامل آن نقطه (آن مجموعه) است:

۱ـ یک فضا را T_0 گوییم هرگاه برای هر دونقطهٔ متمایز در آن، یکی، همسایگی داشته باشد که شامل دیگری نباشد.

۲ـ فضا را T_1 گوییم هرگاه برای هر دو نقطهٔ متمایز از آن، یک همسایگی موجود باشد که شامل دیگری نباشد. ثابت می‌شود که این شرط معادل است با اینکه مجموعه‌های تک عضوی بسته باشند.

۳ـ فضا را T_2 (هاسدورف) گوییم هرگاه هر دو نقطهٔ متمایز آن همسایگی‌هایی با اشتراک تهی داشته باشند.

۴ـ فضا را منتظم[2] گوییم هرگاه هر مجموعهٔ بسته و هر نقطه خارج از آن مجموعه، همسایگی‌های جدا از هم داشته باشند.

۵ـ فضا را نرمال گوییم هر گاه برای هر دومجموعهٔ بستهٔ جدا از هم آن، همسایگی‌های جدا از هم وجود داشته باشد.

۶ـ فضا را کاملاً نرمال گوییم هرگاه هر دو زیرمجموعهٔ آن که هیچیک بستار دیگری را قطع نمی‌کند همسایگی‌های جدا از هم داشته باشند.

مفاهیم فوق را به کمک نمادهای تصویری زیر بهتر می‌توان لمس کرد. اگر برای نمایش نقطه، مجموعهٔ باز، مجموعهٔ بسته و مجموعهٔ دلخواه به ترتیب نمادهای •، ◯، ⊠ و ♡ را به کار بریم:

فضای T_0:

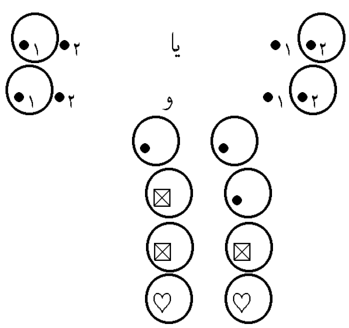
فضای T_1:

فضای T_2:

فضای منتظم :

فضای نرمال :

فضای کاملاً نرمال :



تعریف ۲.۴ بر اساس [۲۵] و [۳۱] بیان شده است و در آنجا اصول جداسازی T_3، T_4 و T_5 به ترتیب با افزودن شرط T_1 به هر یک از شرایط منتظم، نرمال وکاملاً نرمال بودن به دست می‌آیند. اما در [۳۳] ، منتظم یا نرمال بودنِ فضا علاوه بر شرایط مذکور در تعریف ۲.۴ منوط به داشتن شرط T_1 نیز می‌باشد. از

1) separation axioms 2) regular

آنجا که تنها توپولوژیِ متناهیِ $T_۱$ یا $T_۲$، توپولوژی گسسته است، توجه خود را به حالت ضعیفتری از اصول جداسازی $T_۳$ (منتظم)، $T_۴$ (نرمال) و $T_۵$ (کاملاً نرمال) که خاصیت $T_۱$ را نداشته باشد معطوف می‌کنیم. ضمناً برای فضاهای اصلی (AT) روابط زیر را داریم: [۱۷]

$$T_۱ = T_۲ \Rightarrow T_۳ \Rightarrow T_۵ \Rightarrow T_۴$$

۳.۴ تعریف: فضای توپولوژیک X را کاملاً منتظم[1] گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ وهر همسایگی U از x، تابع پیوستهٔ f از X به $[۰, ۱]$ یافت شود به‌طوری‌که $f(x) = ۰$ و $f(X - U) = ۱$.

۴.۴ تعریف: (چند نوع همبندی)

۱ـ فضای X را همبند[2] گوییم هرگاه نتوان X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعهٔ باز سرهٔ جدا از هم آن نوشت. ثابت می‌شود که با تبدیل کلمهٔ «باز» به «بسته» تعریف معادل به دست می‌آید.

۲ـ فضای X را فراهمبند[3] گوییم هرگاه نتوان X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعهٔ باز سرهٔ آن نوشت. فراهمبند راابرهمبند[4] یا همبند قوی[5] نیز می‌نامند.

۳ـ فضای X را تحویل‌ناپذیر[6] گوییم هرگاه نتوان X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعهٔ بستهٔ سرهٔ آن نوشت.

۴ـ فضای X را همبندِ مسیری[7] گوییم هرگاه برای هر دو نقطهٔ x و y در X تابع پیوستهٔ $f : [۰, ۱] \longrightarrow X$ یافت شود که $f(۰) = x$ و $f(۱) = y$.

در فضاهای AT (و در نتیجه در حالت متناهی) مفاهیم همبندی و همبندی مسیری معادلند و ثابت می‌شود که یک فضای AT فراهمبند است اگر و فقط اگر همبند و $T_۴$ باشد. [۱۵]

چون مفاهیم فراهمبند و تحویل‌ناپذیر درکتاب کلاسیک بورباکی [۴] ذکر نشده، بیان چند نکته در این زمینه مفید به نظر می‌رسد. خط حقیقی همبند است اما فراهمبند و نیز تحویل‌ناپذیر نیست. توپولوژی متمم متناهی[8]، یعنی توپولوژی که بازهای آن زیرمجموعه‌هایی باشند که متممشان متناهی است، روی یک مجموعهٔ نامتناهی، تحویل‌ناپذیر است اما فراهمبند نیست. در مجموعه‌های متناهی، یک توپولوژی فراهمبند است اگر و فقط اگر توپولوژی دوگان آن (شامل همهٔ متممهای مجموعه‌های باز در توپولوژی مفروض) تحویل‌ناپذیر باشد؛ بنابراین واضح است که تعداد توپولوژی‌های تحویل‌ناپذیر روی یک مجموعهٔ متناهی برابر با تعداد توپولوژی‌های فراهمبند است اما این توپولوژی‌ها یکی نیستند. [۳۸]

در بندهای تعریف زیر تنها سه مفهوم که در جدول ۱ ذکر شده مورد نظر است.

۵.۴ تعریف: (یکنواختی‌پذیر، متریک‌نماپذیر، متری‌پذیر)

---

1) completely regular 2) connected 3) ultraconnected 4) hyperconnected 5) strongly connected 6) irreducible 7) path connected 8) cofinite

۱ـ خانوادهٔ $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌های $X \times X$، یک یکنواختی[1] روی X تعریف می‌کند هرگاه علاوه بر دو شرط اول پالایه، شرایط زیر را نیز داشته باشد:

- قطر، یعنی زوجهای (x,x) که $x \in X$، متعلق به هر یک از اعضای $\mathcal{U}$ باشد؛
- اگر $V \in \mathcal{U}$ آنگاه $V^{-1} \in \mathcal{U}$ که $V^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in V\}$ ؛
- برای هر $V \in \mathcal{U}$، عضو $W \in \mathcal{U}$ یافت شود به طوری که $W \circ W \subset V$.

در اینجا $S \circ T$ عبارت است از $\{(x,y) \in X \times X | \exists z \in X, (x,z) \in T, (z,y) \in S\}$. ثابت می‌شود که هر یکنواختی $\mathcal{U}$ یک توپولوژی یکتا روی X القا می‌کند به این صورت که برای هر $x \in X$، مجموعه‌های $U(x) = \{y \in X | xUy\}$ که با تغییر U در $\mathcal{U}$ به دست می‌آیند به عنوان بازهای پایه در نظر گرفته شوند. [۴]

۲ـ یک فضای توپولوژیک X را یکنواختی‌پذیر[2] گوییم هرگاه یک یکنواختی یافت شود که توپولوژی القا شده بوسیلهٔ آن بر توپولوژی موجود روی X، منطبق گردد.

۳ـ یک متریکنما[3] روی مجموعهٔ X نگاشت f از $X \times X$ به بازهٔ $[\circ, +\infty)$ از اعداد حقیقی است که شرایط زیر را داشته باشد:

- برای هر $x \in X$، $f(x,x) = \circ$ ؛
- برای هر $x,y \in X$، $f(x,y) = f(y,x)$ ؛
- برای هر $x,y,z \in X$، $f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y)$.

هر متریکنمای f، یک یکنواختی روی X پدید می‌آورد به این صورت که $\mathcal{U}$ را خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های $V_r = \{(x,y) | f(x,y) < r\}$ به ازای هر $r > \circ$، در نظر بگیریم. [۲۵]

۴ـ یک متریک[4] روی مجموعهٔ X، یک متریکنمای d است که اگر $d(x,y) = \circ$ آنگاه $x = y$.

۵ـ یک فضای توپولوژیک X را متریکنماپذیر[5] گوییم هرگاه یک متریکنما یافت شود که توپولوژی القا شده بوسیلهٔ آن بر توپولوژی موجود روی X، منطبق گردد. اگر متریکنمای مذکور یک متریک باشد فضا را متری‌پذیر[6] گوییم.

هر یک از مفاهیم توپولوژیکی فوق، مفهوم متقابلی در نظریهٔ ترتیب دارد. به عنوان مثال، یک ATـتوپولوژی $T_\circ$ است اگر و فقط اگر پیش‌ترتیب متناظر، یک ترتیب جزئی[7] باشد. یک ATـتوپولوژی تحویل‌ناپذیر (فراهمبند) است اگر و فقط اگر مجموعهٔ پیش‌ترتیب شدهٔ متناظر به‌پایین (به‌بالا) جهتدار باشد؛ همچنین یک ATـتوپولوژی $T_۴$ است اگر و فقط اگر هر مؤلفه به پایین جهتدار باشد. برای مجموعه‌های جزئاً مرتبِ متناهی این بدان معنی است که هر عضو، دقیقاً بر یک عضو مینیمال مسلط است. حالت

1) uniformity 2) uniformizable 3) pseudometric 4) metric 5) pseudometrizable
6) metrizable 7) partial order

خاصی از این نوع مجموعه‌های جزئاً مرتب، جنگلِ[1] متناهی است؛ مقصود از یک پیش‌ترتیبِ جنگلی پیش‌ترتیبی است که هیچ زوج غیرقابل مقایسه‌ای، کران بالای مشترک نداشته باشد؛ یک درخت[2] یک جنگلِ همبند (شبیه معنای آنها در گراف) است و هر درخت متناهی یک کوچکترین عضو دارد. [۱۷] حال فرض کنیم $\mathcal{A}^p$ ردهٔ همهٔ توپولوژی‌های AT که خاصیت معین p را دارند، نمایش دهد. حرف c برای «همبند» و حرف i برای «تحویل‌ناپذیر» به کارمی‌رود. اصول جداسازی T_s با عدد s نشان داده می‌شوند. $\mathcal{A}^{pq}$ بیان‌گر اشتراک $\mathcal{A}^p$ و $\mathcal{A}^q$ است. تناظر یک به یک بین توپولوژی‌های AT و پیش‌ترتیب‌ها، تناظری یک به یک بین رده‌های همتا در زیر برقرار می‌کند. برای اثبات‌ها می‌توان به [۲]، [۱۴]، [۱۵]، [۲۹]، [۳۷] و [۴۲] مراجعه کرد.

1) forest 2) tree

رده	خاصیت در توپولوژی AT	خاصیت متناظر در پیش‌ترتیب	نماد شمارش
$\mathcal{A}$	توپولوژی AT	پیش‌ترتیب	A_n
$\mathcal{A}^{0}$	T_0	ترتیب جزئی	A_n^{0}
$\mathcal{A}^{1}$	$T_3 + T_0 = T_2 = T_1$ = گسسته = متری‌پذیر	رابطهٔ همانی	A_n^{1}
$\mathcal{A}^{3}$	T_3 = منتظم = کاملاً منتظم = یکنواختی‌پذیر = متریکنماپذیر	رابطهٔ هم‌ارزی	A_n^{3}
$\mathcal{A}^{4}$	T_4 = نرمال	پیش‌ترتیب به‌طور مؤلفه‌ای به‌پایین جهت‌دار	A_n^{4}
$\mathcal{A}^{5}$	T_5 = کاملاً نرمال	پیش‌ترتیب جنگلی	A_n^{5}
$\mathcal{A}^{04}$	$T_4 + T_0$	ترتیب جزئی به‌طور مؤلفه‌ای به‌پایین جهت‌دار	A_n^{04}
$\mathcal{A}^{05}$	$T_5 + T_0$	ترتیب جزئی جنگلی	A_n^{05}
$\mathcal{A}^{c}$	همبند	پیش‌ترتیب همبند	A_n^{c}
$\mathcal{A}^{0c}$	همبند+ T_0	ترتیب جزئی همبند	A_n^{0c}
$\mathcal{A}^{1c}$	همبند + $T_1(T_2)$ = همبندوگسسته	ترتیب جزئی یک‌نقطه‌ای	A_n^{1c}
$\mathcal{A}^{3c}$	همبند+ T_3 = ناگسسته	رابطهٔ هم‌ارزی یک بلوکی	A_n^{3c}
A^{4c}	همبند+ T_4 = فراهمبند	پیش‌ترتیب به‌پایین جهت‌دار	A_n^{4c}
A^{5c}	همبند+ T_5	پیش‌ترتیب درختی	A_n^{5c}
A^{04c}	همبند+ $T_4 + T_0$	ترتیب جزئی به‌پایین جهت‌دار	A_n^{04c}
A^{5c}	همبند+ $T_5 + T_0$	ترتیب جزئی درختی	A_n^{05c}
A^{i}	تحویل‌ناپذیر	پیش‌ترتیب به‌بالا جهت‌دار	A_n^{i}
A^{0i}	تحویل‌ناپذیر+ T_0	ترتیب جزئی به‌بالا جهت‌دار	A_n^{0i}
A^{4i}	تحویل‌ناپذیر+ T_4	پیش‌ترتیب به‌بالا و به‌پایین جهت‌دار	A_n^{4i}
A^{5i}	تحویل‌ناپذیر+ T_5	پیش‌ترتیب کلی	A_n^{5i}
A^{04i}	تحویل‌ناپذیر+ $T_4 + T_0$	ترتیب جزئی به‌بالا و به‌پایین جهت‌دار	A_n^{04i}
A^{05i}	تحویل‌ناپذیر+ $T_5 + T_0$	ترتیب کلی = ترتیب خطی	A_n^{05i}

جدول ۱

این رده‌های متشکل از فضاها و مجموعه‌های مرتب را می‌توان تحت رابطهٔ جزئیت بر طبق نمودار زیر مرتب نمود:

نمودار ۲

گفتنی است که مارسل ارنه[1] در [۱۷] نشان داده است که تمام اعداد فوق را می‌توان تنها با داشتن یکی از اعداد A_n یا A_n° به سادگی به دست آورد و این به خودی خود، نتیجه‌ای هیجان انگیز است. امید است در مقالهٔ (در دست تدوین) «الگوریتمها» این نتایج به شکل مناسبی در کنار سایر نتایج به دست آمده ارائه شود. همچنین وی رابطه‌ای برای شمارش تعداد ترتیب‌های جزئی روی n نقطه، $P_n = A_n^{\circ}$، یافته است [۱۵]، اما اذعان می‌کند که برای استفاده‌های عملی مناسب نیست. [۱۷] این رابطه چنین است:

$$P_n = \sum_{r=0}^{2^{n^2}-1} \prod_{i=0}^{n-1} b^r_{ni+i} \prod_{j=0}^{n-1}(1 - b^r_{ni+j} b^r_{nj+i}) \prod_{k=0}^{n-1}(1 - b^r_{ni+j} b^r_{nj+k}(1 - b^r_{ni+k}))$$

که $b_i^r = \lfloor 2^{-i} r \rfloor - 2\lfloor 2^{-i-1} r \rfloor$ بیانگر iـامین رقم در بسط دودویی r $(0 \leqslant i < n^2)$ است. هر رابطهٔ دوتایی روی $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ بوسیلهٔ یک جمعوند معرفی شده که r از 0 تا $2^{n^2} - 1$ تغییر می‌کند. مقدار b^r_{ni+j}، ۱ است اگر i و j باهم در رابطه باشند و در غیر این صورت صفر است. حاصل ضربها روی i بازتابی بودن، روی j پادمتقارن بودن و روی k ترایایی بودن را نشان می‌دهد. بنابراین تمام حاصل ضرب ۱ است اگروفقط اگر رابطهٔ مورد بررسی، یک ترتیب‌جزئی باشد و در سایر حالات صفر است.

ضروری به نظر می‌رسد که رابطهٔ بین A_n و A_n° را به عنوان حالت خاصی از قضیه‌ای که در [۱۳] (و

1) Marcel Erné

نیز [۱۵]) ثابت شده است و در اینجا از مقالهٔ [۱۷] نقل می‌شود ارائه کنیم؛ در روابط زیر $s_{n,m}$ و $S_{n,m}$ به ترتیب نشان دهندهٔ اعداد استرلینگ نوع اول و دوم می‌باشد:

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} S_{n,m} A^{\circ}_m \qquad , \qquad A^{\circ}_n = \sum_{m=1}^{n} s_{n,m} A_m .$$

در پایان جدول زیر راکه حاوی اعداد به دست آمده برای $n \leq 16$ است به همراه تاریخچهٔ آنها از مقالهٔ [۲۴] نقل می‌کنیم. علاوه بر این علاقه‌مندان را برای دریافت آخرین پیشرفتهای به دست آمده در زمینهٔ دنباله‌های مشهوری از اعداد صحیح به پایگاه The On-line Encyclopedia of Integer Sequences با نشانی http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html ارجاع می‌دهیم. در این پایگاه با وارد کردن چند جملهٔ نخست دنباله می‌توان به آخرین نتایج دست یافت.

	ترتیب‌های جزئی/توپولوژی‌های T_0		پیش‌ترتیب‌ها/توپولوژی‌ها
n	A°_n		A_n
۱	۱		۱
۲	۳		۴
۳	۱۹		۲۹
۴	۲۱۹		۳۵۵
۵	۴۲۳۱		۶۹۴۲
۶	۱۳۰۰۲۳	a	۲۰۹۵۲۷
۷	۶۱۲۹۸۵۹	b	۹۵۳۵۲۴۱
۸	۴۳۱۷۲۳۳۷۹	c	۶۴۲۷۷۹۳۵۴
۹	۴۴۵۱۱۰۴۲۵۱۱	d	۶۳۲۶۰۲۸۹۴۲۳
۱۰	۶۶۱۱۰۶۵۲۴۸۷۸۳	e	۸۹۷۷۰۵۳۸۷۳۰۴۳
۱۱	۱۳۹۶۲۸۱۶۷۷۱۰۵۸۹۹	e	۱۸۱۶۸۴۶۰۳۸۷۳۶۱۹۲
۱۲	۴۱۴۸۶۴۹۵۱۰۵۵۸۵۳۴۹۹	f	۵۱۹۳۵۵۵۷۱۰۶۵۷۷۴۰۲۱
۱۳	۱۷۱۸۵۰۷۲۸۳۸۱۵۸۷۰۵۹۳۵۱	f	۲۰۷۸۸۱۳۹۳۶۵۶۶۶۸۹۵۳۰۴۱
۱۴	۹۸۴۸۴۳۲۴۲۵۷۱۲۸۲۰۷۰۳۲۱۸۳	f	۱۱۵۶۱۷۰۵۱۹۷۷۰۵۴۲۶۷۸۰۷۴۶۰
۱۵	۷۷۵۶۷۱۷۱۰۲۰۴۴۰۶۸۸۳۵۳۰۴۹۹۳۹	g	۸۸۷۳۶۲۶۹۱۱۸۵۸۶۲۴۴۴۹۲۴۸۵۱۲۱
۱۶	۸۳۴۸۰۵۲۹۷۸۵۴۹۰۱۵۷۸۱۳۸۴۴۲۵۶۵۷۹	i	۹۳۴۱۱۱۱۳۴۱۱۷۱۰۰۳۹۵۶۵۲۱۰۴۹۴۰۹۵

,[a]Comtet(۱۹۶۶)[۸], [b]Evans (۱۹۶۷)[۱۹], [c]Erné (۱۹۷۰)[۱۳], [d]Erné (۱۹۷۲)[۱۴], [e]Das(۱۹۷۷)[۱۹],
,[f]Erné & Stege(۱۹۹۰)[۱۷, ۳۹], [g]Erné & Stege(۱۹۹۳)[۱۸], [i]Heitzig & Reinhold(۲۰۰۰)[۲۴].

جدول ۲

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم که از تلاش و همراهی برادر ارجمندم جناب آقای محمد فرشی که به انحاء مختلف، بویژه در تهیهٔ نخستین برنامه‌های رایانه‌ای جهت تولید توپولوژی‌ها، مرا یاری نمودند و از جناب آقای دکتر حمید مظاهری تهرانی که با محبت ایشان دسترسی به منابع مورد نیاز میسر شد و از تمامی استادان و همکاران ارجمندم در دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه یزد بخصوص آقایان دکتر بیژن دواز و دکتر محمدعلی ایرانمنش که مرهون الطافشان هستم و در نهایت، از سروران و استادان گرانقدری که این مسئله بهانه‌ای برای کسب فیض از محضرشان بود به‌ویژه جناب آقای دکتر ارسلان شادمان که تجلی این مسئله یکی از برکات کلاس درس ایشان است با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

مراجع

[1] Bruce A. Anderson, *Families of mutually complementary topologies*, Proc. A.M.S. **29**(1971), 362-368.

[2] P. S. Alexandrov, *Diskrete Räume*, Mat. Sb. (N.S.) **2**, 501-518.

[3] J. P. Barthelemy, *An asymptotic equivalent for the number of total preorders on a finite set*, Discrete Math. **29**(1980), 311-314.

[4] Nicolas Bourbaki, *General Topology*, Vol. I, II, Springer-Verlag 1989.

[5] Garrett Birkhoff, *On the combination of topologies*, Fund. Math. **26**(1936), 156-166.

[6] Jason I. Brown and Stephen Watson, *Partial order complementation graphs*, Order **11**(1994), 237-255.

[7] Jason I. Brown and Stephen Watson, *The number of complements of a topology on n points is at least* 2^n, Discrete Mathematics **154**(1996), 27-39.

[8] L. Comtet, *Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini*, V. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B **262**(1966), 1091-1094.

[9] S. K. Das, *A machine representation of finite* T_0 *topologies*, J. ACM **24**(1977), 676-692.

[10] J. L. Davison, *Asymptotic enumeration of partial orders*, Congr. Numer. **53**(1986), 277-286.

[11] D. Dhar, *Entropy and phase transitons in partially ordered sets*, J. Math. Phys. **19**(1978), 1711-1713.

[12] D. Dhar, *Asymptotic enumeration of partial ordered sets*, Pacific J. Math. **90**(1980), 299-305.

[13] M. Erné, *Endlich topologien*, Diploma thesis, Universität München (1970).

[14] M. Erné, *Struktur- und Anzahlformeln für Topologien auf endlichen Mengen*, Ph.D. Dissertation, Universität Münster (1972).

[15] M. Erné, *Struktur- und Anzahlformeln für Topologien auf endlichen Mengen*, Manuscripta Math. **11**(1974), 221-259.

[16] M. Erné, *On the cardinalities of finite topologies and the number of antichains in partially ordered sets*, Discrete Math. **35**(1981), 119-133.

[17] M. Erné and Kurt Stege, *Counting finite posets and topologies*, Order **8**(1991), 247-265.

[18] M. Erné and Kurt Stege, *The number of topologies and orders on 15 points*, Preprint, Universität Hannover, (1993).

[19] J. W. Evans, F. Harary and M. S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Comm. ACM **10**(1967), 295-297, 313.

[20] A. S. Farrag and Adel A. Sewisy, *Computer construction and enumeration of topologies on finite sets*, Intern. J. Computer Math. **72**(1999), 433-440.

[21] A. S. Farrag and Adel A. Sewisy, *Computer construction and enumeration of all topologies and hyperconnected topologies on finite sets*, Intern. J. Computer Math. **74**(2000), 471-482.

[22] Otto Fröhlich, *Das Halbordnungssystem der topologichen Räume auf einer Menge*, Math. Ann. **156**(1964), 79-95.

[23] Juris Hartmanis, *On the lattice of topologies*, Canad. J. Math. **10**(1958), 547-553.

[24] Jobst Heitzig and Jürgen Reinhold, *The number of unlabled orders on fourteen element*, Order **17**(2000), 333-341.

[25] John L. Kelley, *General Topology*, Spinger-Verlag (1975).

[26] D. J. Kleitman and B. L. Rothschild, *The number of finite topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. **25**(1970), 276-282.

[27] D. J. Kleitman and B. L. Rothschild, *Asymptotic enumeration of partial orders on a finite set*, Trans. Amer. Math. Soc. **205**(1975), 205-220.

[28] D. J. Kleitman and K. J. Winston, *The asymptotic number of lattices*, Ann. Diser. Math. **6**(1980), 243-249.

[29] J. Knopfmacher, *Note on finite topological spaces*, J. Austral. Math. Soc. **9**(1969), 252-256.

[30] Roland E. Larson and W. J. Thron, *Covering relations in the lattice of T_1-topologies*, Trans. Amer. Math. Soc. **168**(1972), 101-111.

[31] Roland E. Larson and Susan J. Andima, *The lattice of topologies: a survey*,Rocky Mountain J. Math. **5**, no 2, (1975), 177-198.

[32] F. Lorrain, *Notes on topological spaces with minimal neighborhoods*, Amer. Math Monthly **76**(1969), 616-627.

[33] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Printice-Hall, (1975).

[34] A. S. Mashhour and A. S. Farrag, *Simple topological space*, In: 14th An. Conf. in Stat. Comp. Sci. Res. Math. Cairo University, (1979), 78-85.

[35] Paul S. Schnare, *Multiple complementation in the lattice of topologies*, Fund. Math. **62**(1968), 53-59.

[36] Paul S. Schnare, *Infinite complements in the lattice of topologies*, Fund. Math. **64**(1969), 249-255.

[37] H. Sharp Jr., *Quasi-orderings and topologies on finite sets*, Proc. Amer. Math. Soc.**17**(1966), 1344-1349.

[38] L. A. Steen and Seebach, *Counter examples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1970).

[39] K. Stege, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Quasiordnungen und Topologien*, Diploma thesis, Universität Hannover (1990).

[40] Anne K. Steiner, *The lattice of toplogies: structure and complementation*, Trans. Amer. Math. Soc. **122**(1966), 379-397.

[41] D. Stephen, *Topology on finite sets*, Amer. Math. Monthly **75**(1968), 739-741.

[42] R. E. Stong, *Finite topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **123**(1966), 325-340.

[43] R. Vaidyanathaswamy, *Treatise on set topology*, Indian Math. Soc. Madras (1947).

[44] A. C. M. Van Rooij, *The lattice of all topologies is complemented*,Canad. J. Math. **20**(1968), 805-807.

[45] Stephen Watson, *The number of complements in the lattice of topologies on a fixed set*, Topology and its Application **55**(1994), 101-125.

حسین خورشیدی

دانشگاه یزد، دانشکدهٔ ریاضی

پست الکترونیک: khorshidi@yazduni.ac.ir