

ارزش آپسیون‌های مالی

نویسنده: اِلیس ژوینی^۱

مترجم: فائزه توتونیان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، ارسلان شادمان

دنیای مالی ارزش آپسیون‌ها^۲ را از طریق فرمول‌هایی مشخص می‌کند که از تحقیقات نسبتاً جدید ریاضی به دست می‌آیند. تلاش برای دستیابی به بهترین فرمول‌ها ادامه دارد... و این امر منحصر به شرکت‌کنندگان در بورس نیست.

در مقدمهٔ چاپ چهارم کتاب مبانی اقتصاد سیاسی محض یا نظریهٔ ثروت اجتماعی، که سال ۱۹۰۰ در لوزان منتشر شد، لئون والراس^۳ نوشته است که «تمامی این نظریه یک نظریهٔ ریاضی است، به این معنی که هر چند ارائهٔ آن می‌تواند به زبان معمولی انجام شود، اثبات باید به طور ریاضی انجام پذیرد». اندکی بعد، او همچنین اضافه می‌کند که «در حال حاضر اقتصاد سیاسی همانند ستاره‌شناسی و مکانیک یک علم است که هم تجربی و هم استدلالی می‌باشد... قرن بیستم که زمان چندانی به فرارسیدنش نمانده است این نیاز را احساس خواهد کرد [...] که علوم اجتماعی را در دست مردانی قرار دهد که دارای

^۱ Jouini, Elyès: *Le prix des options financières*, in: *L'explosion des mathématiques*, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 81-83

^۲ آپشن یا امتیاز خرید نیز گفته می‌شود. در این ترجمه از لفظ موقت آپسیون استفاده کرده‌ایم (و).

^۳ Léon Walras



بورس نیویورک، یک روز باشکوه، بیش از ۲۰ سال است که ریاضی در دنیای مالی وارد شده است، بالعکس دنیای مالی نیز مسائلی را فراهم کرده است که تحقیق در برخی دامنه‌های ریاضی را ایجاب می‌کنند. (کلیشه گاما لیزون - گی فورد Gamma Liaison/ Gifford)

فرهنگی جامع باشند و به طریقی هم با استدلال و هم به تشریح و تعقل و تجربه خو گرفته باشند. بنابراین اقتصاد ریاضی جایگاه خود را در کنار ستاره‌شناسی و مکانیک ریاضی به دست خواهد آورد. می‌خواهم در خلال مثالی که متعاقباً ارائه می‌شود و از امور مالی برگرفته شده است، نشان دهم که چگونه ریاضیات و اقتصاد به حفظ روابط تنگاتنگ بین خود ادامه می‌دهند و در جالب‌ترین موضوع‌های کنونی هر دو رشته بهره‌وری متقابل واقعی وجود دارد.

مسأله‌ای که در این جا مورد توجه است، ارزیابی اُپسیون‌ها در امور مالی است. این موضوع به قدمت خود اُپسیون است، که آثاری از آن را در عهد قدیم و قرن هفدهم روی بازار پپاز گل لاله در هلند باز می‌یابیم. با وجود این، همان‌طور که کمی بعد ملاحظه خواهیم کرد، این سؤال اولین پاسخ قانع‌کننده ریاضی خود را در سال ۱۹۷۳ یافته است. البته تصادفی نیست که در همان سال اولین بازار سازمان یافته اُپسیون‌ها، یعنی بازار شیکاگو، از رونق قابل توجهی برخوردار شد و در سال‌های بعد هم هیچ‌گاه بی رونق نشده است.

یک اُپسیون مالی چیست؟ سهام مشخصی را در بازارهای مالی در نظر می‌گیریم که قیمت آن امروز برابر S باشد. بازارهای مالی به خریدارهای بالقوه موجود، امکان خرید این سهام را در یک موعد دیرتر، مثلاً بعد از سه ماه با قیمت K در قالب یک اُپسیون فراهم می‌سازند. شاید این امر برای خریداری که مثلاً هنوز پول لازم را در اختیار ندارد و

می‌خواهد در برابر یک افزایش قیمت مصون بماند، جالب باشد. چنین اُپسیونی، نوعی قرارداد اطمینان‌بخش است که حق خرید سهام را در یک موعد دیرتر و با یک قیمت تضمینی K فراهم می‌کند. واضح است که خود این حق باید به قیمت مشخصی فروخته شود، اما چه قیمتی؟ مسأله ارزیابی قیمت اُپسیون همین است. به زبان مالی: قیمت اُپسیون روی یک سهم با قیمت زمان «صدور» S یا قیمت اجرای K و سررسید سه‌ماهه چقدر باید باشد؟

واضح است که خریدار چنین حقی، فقط زمانی به اجرای آن مبادرت می‌ورزد که در طی سه ماه، قیمت سهام در بازار بیشتر از K باشد. بنابراین سهام را به قیمت K خریداری خواهد کرد و به قیمت جاری آن زمان خواهد فروخت و سودی مساوی تفاوت آن‌ها به دست خواهد آورد. بنابراین این معامله برای خریدار در صورتی که تفاوت مثبت باشد در عرض سه ماه سودی مساوی با تفاوت بین قیمت فعلی سهام و K فراهم می‌سازد و در غیر این صورت سود حاصل صفر خواهد بود.

اصل ناسوداگری مبنای تعیین قیمت دارایی‌های امور مالی است.

برای تعیین قیمت چنین اُپسیونی، نظریه سوداگری بر اصل بسیار ساده‌ای استوار است که دال بر نبود فرصت‌طلبی‌های سوداگرانه است. به بیان دیگر این اصل گویای آن است که امکان ندارد، با سرمایه‌گذاری به ارزش صفر در حال حاضر، برای هر چه که در آینده پیش می‌آید پرداخت مثبتی در یک موعد دیرتر تضمین شود (هیچ در برابر هیچ). اصل نبود فرصت‌طلبی‌های سوداگرانه به این معنی نیست که بردهای معجزه‌آسا غیرممکن باشند. زیرا من می‌توانم قیمت یک بلیط بخت‌آزمایی را به خوبی قرض بگیریم و یک چنین بلیطی را خریداری نمایم. بنابراین سهم شخصی من صفر است. سپس اگر یک میلیون یورو برنده شوم، قرضم را پس می‌دهم و سود زیادی به دست می‌آورم. این اصل فقط بیان می‌کند که یک چنین سودی پیشاپیش تضمین شده نیست. در نتیجه، در معامله قبلی همچنین می‌توانم هیچ سودی به دست نیاورم و مجبور به پرداخت قرضم باشم، بنابراین امکان خطر زیان را خواهم داشت.

به این ترتیب اصل ناسوداگری به‌طور ساده به این معنی است که هر درآمد بیشتر از بازده یک دارایی پایه بدون ریسک (نرخ بهره، اوراق قرضه، اسناد خزانه و غیره) لزوماً به یک ریسک وابسته است. مثلاً SICAVها دارای بهره متوسطی بیش از بهره بازار پول هستند؛ با این وجود، این بهره تضمین نمی‌شود و ممکن است مانند آنچه که در طول سال

۲۰۰۱ ملاحظه کردیم، از بهره بازار پول نیز کمتر شود.

اکنون برای ساده شدن مسأله فرض می‌کنیم که بازار فقط در دو تاریخ عمل کند، یکی امروز و دیگری در سه ماه بعد، و قیمت سهام S در سه ماه بعد فقط دو مقدار، مثلاً ۱۰۰ یا ۱۵۰ یورو باشد. به علاوه فرض کنیم که K قیمت توافقی خرید در انقضای موعد اسیون، بین بالاترین مقدار $S_h = ۱۵۰$ و کمترین مقدار $S_b = ۱۰۰$ ، مثلاً $K = ۱۴۰$ یورو باشد. اگر قیمت سهام در سه ماه بعد در حد بالاترین مقدار یعنی ۱۵۰ یورو باشد، معامله‌کننده از حق خود استفاده می‌کند و به قیمت توافق شده قبلی $K = ۱۴۰$ یورو خریداری می‌کند، بنابراین سود وابسته به معامله در این حالت برابر $۱۰ = ۱۵۰ - ۱۴۰ = S_h - K$ یورو خواهد بود. اما اگر قیمت سهام پس از سه ماه در حد کمترین مقدار یعنی ۱۰۰ یورو باشد، معامله‌کننده از حق خرید خود با قیمت K که بالاتر است، صرف نظر خواهد کرد، سود وابسته به معامله در این حالت صفر خواهد بود.

می‌توان نشان داد که چنین سودی را همچنین می‌توان با تشکیل پرونده تجاری مشتمل بر اوراق بهادار منحصر به سهام و سرمایه‌گذاری (یا وام‌ها) بر اساس نرخ بهره بازار که در این جا به r نمایش می‌دهیم، به دست آورد. ارزش معامله چنین اوراق بهاداری را C می‌نامیم. دو دارایی با بازده یکسان باید دارای قیمت یکسان باشند (زیرا در غیر این صورت، ثابت می‌شود که اصل ناسودآوری نقض شده است). بنابراین از آن نتیجه می‌گیریم که قیمت اسیون باید برابر C باشد.

ارزش C برای فعالیت‌های اوراق بهادار که مساوی با قیمت اسیون است، می‌تواند به صورتی دقیق تعیین شود. نشان می‌دهیم که C میانگین وزن دار پرداخت‌های اسیون بر اساس ارزش حال، یعنی میانگین وزن دار مبالغ $(S_h - K)/(1 + r)$ و $0/(1 + r) = 0$ می‌باشد، به علاوه ثابت می‌کنیم که وزن‌های دخیل در این میانگین به گونه‌ای هستند که قیمت S در سهام امروز، خود یک میانگین وزن دار از پرداخت‌های سهام $S_h/(1 + r)$ و $S_b/(1 + r)$ با وزن‌های یکسان بر اساس ارزش وقت آن است. به طور دقیق‌تر می‌توان ثابت کرد که یک قانون احتمال وجود دارد که بر اساس آن قیمت هر دارایی، برابر امید پرداخت‌های آتی آن است که بر اساس همین قانون محاسبه می‌شود. این نتیجه آخر به کمک جبرخطی مقدماتی به دست می‌آید، و مربوط به مدل ساده ارائه شده فوق است. اما به کمک روش‌های آنالیز محدب که حاصل تلاش‌های اواسط قرن بیستم است، این مدل به حالتی تعمیم می‌یابد که در آن سهام می‌تواند مقادیر متفاوتی (به تعداد متناهی) اختیار کند.

حساب تصادفی: هنگامی که امور مالی و ریاضیات نظری همدیگر را تقویت می‌کنند؟

با وجود این، اگر بخواهیم به حقیقت بیشتری دست یابیم و مدلی در نظر بگیریم که در آن هم زمان پیوسته باشد و هم قیمت‌های ممکن در یک پیوستار مقدار بگیرند، ناچاریم برای تفسیر همان اصل ساده سوداگری، به مطالب پیشرفته‌تر نظریه احتمالات که در نیمه دوم قرن بیستم پدیدار گشت، متوسل شویم. این موضوع به طور دقیق‌تر به نظریه فرآیندهای تصادفی (فرآیندهایی که در آن مقادیر به طور تصادفی در طی زمان تغییر می‌کنند) و نظریه معادلات دیفرانسیل تصادفی (معادلات دیفرانسیلی که در آن مقادیر تصادفی وارد می‌شوند) مربوط می‌گردد. در این زمینه‌ها جدیدترین توسعه‌ها به گونه‌ای تنگاتنگ به مسائل مطرح در امور مالی وابسته می‌باشند.

در این مدل‌ها، فرض بر این است که ارزش سهام با یک نرخ بهره قطعی (غیرتصادفی)، به اضافه یک جمله تصادفی با میانگین صفر و دامنه‌ای متناسب با دارایی مورد نظر، تغییر می‌کنند. این تغییرات تصادفی فرآیند نامیده می‌شوند و می‌توانند به زمان و وقایع بی‌شمار دیگر درونی و بیرونی وابسته باشند. بر اساس این فرض‌ها، درمی‌یابیم که قیمت آپسیون از یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (معادله دیفرانسیلی که در آن تابع مجهول بستگی به چندین متغیر دارد) پیروی می‌کند. در ساده‌ترین حالت، که مطالعات به طور مستقل از سوی توسط فیشر بلاک^۲ و مایرن شولز^۳ آمریکایی و از طرف دیگر توسط روبرت مرتون^۴ در سال ۱۹۷۳ انجام شده است، دیده می‌شود که این معادله در واقع همان معادله انتشار گرما است که فیزیکدان‌ها با آن به خوبی آشنا هستند. بنابراین ممکن است آن را به طور روشنی حل کرد و قیمت آپسیون را به صورت تابعی از ویژگی‌های مربوطه (انقضای موعد، قیمت اجرا)، همچنین نرخ سهام و فراریت آن تعیین کرد. این همان فرمول بلاک - شولز و مرتون است که برای شولز و مرتون جایزه نوبل اقتصاد را در سال ۱۹۹۷ به ارمغان آورد (بلاک در ۱۹۹۵ درگذشت).

این فرمول و اشکال مختلفی از آن در تمام مراکز مالی جهان استفاده می‌شوند. این‌ها که بر روی همه کامپیوترهای سالن‌های بازار برنامه‌ریزی شده‌اند، و روزانه در اختیار تعداد

^۱ Volatilité

^۲ Fisher Black

^۳ Myron Scholes

^۴ Robert Merton

بی‌شماری از مراجعین قرار می‌گیرند، خود مثالی از وابستگی بین ریاضیات نظری و کاربردهای ملموس هستند. با این حال فرمول بلاک - شولز و مرتون فقط مربوط به حالت بسیار ساده‌ای محدود است که در آن نرخ بهره، میانگین عایدات، سطح ریسک و غیره در طی زمان ثابت باقی می‌مانند. به محض این که این فرض‌ها را تغییر دهیم، معادلات به دست آمده دیگر با معادله انتشار گرما معادل نیستند. معادلات دقیق دیگری که متأثر از تغییرات هستند ظاهر می‌شوند و اغلب به روش‌های حل خاص خود نیازمندند، اعم از حل ضمنی، صریح یا عددی. کار بر روی برخی از این معادلات بود که سبب شد در سال ۱۹۹۰ پژوهشگران فرانسوی داهر^۱ و رومانو^۲ که در آن زمان در دانشگاه پاریس - دوفین و صندوق مستقل تجدید منافع مالی^۳ کار می‌کردند، به دریافت جایزه^۳ IMB محاسبات عددی قوی نایل شوند.

بالاخره اگر سعی کنیم که بیشتر واقع‌گرا باشیم و هزینه‌های معامله‌ها، قیدهای گوناگون تحمیل شده از سوی بازار یا همچنین تأثیر تعداد معامله‌ها روی قیمت را در نظر بگیریم، روش‌های محاسبات تصادفی کلاسیک کافی نخواهند بود. باید، همانند آنچه که در سال‌های اخیر انجام شده است، ابزارهای مخصوصی نظیر معادلات دیفرانسیل تصادفی تنزلی یا روش‌های دقیق دوگانی در کنترل بهینه تصادفی توسعه یابند. درک این مسأله ممکن است تعجب‌آور باشد، که ایده‌های جدید ریاضی، که به منظور حل مسائل اقتصادی و مالی تحقق یافته‌اند، وابستگی به مسائل موجود در هندسه و فیزیک - از قبیل تغییر شکل سطح یا ذوب قطعه‌های یخ - را اثبات می‌کنند و برای هندسه و فیزیک جلوه روشن جدیدی فراهم می‌کنند.

الیس ژوینی

استاد دانشگاه، مرکز پژوهشی ریاضیات تصمیم‌گیری (CEREMADE)

دانشگاه پاریس - دوفین (پاریس ۹)

چند مرجع

- N. Bouleau, *Martingales et marchés financiers* (Odile Jacob, 1998).

^۱ C. Daher

^۲ M. Romano

^۳ Caisse autonome de refinancement

- F. Black et M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-654 (1973).
- C. Huang et R. Litzenberger, *Foundations for financial economics* (North-Holland, 1988).
- L. Walras, *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale* (Corbaz, Lausanne, 1874, édition définitive revue et augmentée par l'auteur, LGDJ, Paris, 1952).

Elyès Jouini

Professeur des Universités,

CEREMADE (Center de mathématiques de la décision)

Université Paris-Dauphine (Paris 9)