فیلسوف و ریاضیدان

نویسنده: پیر کاسو ــ نوگِس [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

فلسفه و ریاضیات در طول تاریخِ خود، رابطه‌ای تنگاتنگ و به همان اندازه شگفت‌انگیز داشته‌اند. شایسته است که در تمدن یونان به افلاطون[۲] و در آغاز دورهٔ جدید به دکارت[۳] توجه کنیم. در این مقاله، دو چهرهٔ برجستهٔ قرن بیستم، داوید هیلبرت[۴] و ادموند هوسِرل[۵] را مطرح می‌کنیم.

ادموند هوسرل و داوید هیلبرت در سال ۱۹۰۱ در گوتینگن[۶] با هم ملاقات می‌کنند. هوسرل (فیلسوف) قبلاً تحصیلات ریاضی داشته است. او نخست در برلین دستیار کارل

---

[۱] Cassou-Noguès, Pierre: *Le Philosophe et le mathématicien*,
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 51-55

[۲] Platon

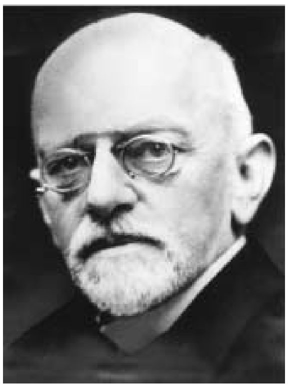
[۳] Descartes

[۴] David Hilbert

[۵] Edmund Husserl

[۶] Göttingen

وایرشتراس[۱] ریاضیدان بزرگ در رشتهٔ آنالیز بود، سپس در وین با فرانتس‌برنتانو[۲] دیدار



داوید هیلبرت (۱۸۶۲ تا ۱۹۴۳) مانند هانری پوانکارهٔ فرانسوی یکی از ریاضیدانان بزرگ سالهای ۱۹۰۰ بود. او با عمق آثار و دیدگاه‌هایش و با پویایی خاصی که توانست در گوتینگن به‌وجود آورد، تأثیر عظیمی بر ریاضیات قرن بیستم گذاشت (کلیشه از AKG)

داشته و به سوی فلسفه گرایش یافته بود. در ۱۸۹۱ کتاب فلسفهٔ حساب[۳] را منتشر کرده بود. امّا جلد اول پژوهش‌های منطقی[۴] او همزمان با استقرارش در گوتینگن منتشر گردید. هیلبرت (ریاضیدان) از ۱۸۹۷ در گوتینگن مستقر است. او مسالهٔ مشهوری به نام «مسألهٔ گوردان»[۵] را در نظریهٔ ناورداها، که حدود بیست سال ذهن ریاضیدانان آلمانی را به خود مشغول کرده بود، حل کرد. او در زمینهٔ جبر، «نظریهٔ میدان‌های جبری» را بسط داده است. هوسرل و هیلبرت تقریباً هم سن و سال هستند و در دانشکدهٔ فلسفه، که در واقع فرا گیرندهٔ ریاضیدانان و فیلسوفان است، همدیگر را ملاقات می‌کنند. هر یک از این دو نفر، پا به پای یکدیگر، تغییرات بنیادین در رشتهٔ مورد مطالعهٔ خود را به وجود آورده‌اند. هوسرل پدیده‌شناسی[۶] را کشف می‌کند و هیلبرت روش مجرّد[۷] را بنا می‌نهد که مشخّصهٔ ریاضیات نوین است.

---

[۱] Karl Weierstrass

[۲] Franz Brentano

[۳] Philosophie de L' arithmétique

[۴] Recherches logiques

[۵] Problème de Gordan

[۶] Phénoménologie

[۷] méthode abstraite

گوتینگن، جایگاه اعتلای ریاضیات، پذیرای فلاسفه است

هر چند گوتینگن شهر کوچکی نزدیک اشتوتگارت بود، اندکی پس از ۱۹۰۰ مرکز دنیای ریاضی گردید. فلیکس کلاین[۱] در راس دانشکده قرار داشت. این هندسه‌دانِ بزرگ که وجود فضاهای نااقلیدسی را قاطعانه ثابت کرد، از پژوهش چشم‌پوشی می‌کند تا از سویی به درس‌هایش دربارهٔ گسترش ریاضیات در قرن ۱۹ بپردازد و از سوی دیگر به سازماندهی و ادارهٔ دانشکده مشغول شود و وسایل مالی جدیدی را برای آن فراهم کند. او هیلبرت و سپس هرمان مینکوفسکی[۲] را به گوتینگن می‌آورد. مینکوفسکی در اثنایِ درسی مشهور، «پیوستارِ فضا ـ زمان»[۳] را طرح می‌کند که به نام او معروف است و بعداً در بیان نظریهٔ نسبیت آینشتاین[۴] مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر هفته، انجمن ریاضی گوتینگن کِنار یک سخنران، که گاهی از گوتینگن و گاهی از بیرون است، گرد هم جمع می‌شوند. هوسرل، فیلسوف، در آوریل ۱۹۰۱ سخنران است و موضوع صحبت او مسألهٔ موهومی‌ها در حساب است. گوتینگن جایگاهی است که وقف ریاضیات شده است. نقل می‌کنند که روزی مینکوفسکی در خیابان اصلی آن گردش می‌کرد جوانی را دید که متفکر است و از موضوعی شدیداً رنج می‌برد. دستش را با مهربانی روی شانهٔ جوان گذاشت و به او گفت: «نگران مباش، همگراست». آن جوان که اطمینان خاطر یافته بود، دور شد.

گوتینگن جایی است که هیلبرت روش مجرد ریاضیات نوین را به شکلی پخته در آن ساخته و پرداخته کرد. روش مجرد در جبر قرن ۱۹ شروع شده بود. به ویژه، ریشارد ددکیند[۵] و لئوپولدکرونکر[۶] آنچه را ساختارها می‌نامیم مطرح کرده بودند. یک ساختار ریاضی مانند ساختار «گروه»، «فضای بُرداری»، «هیأت» و غیره به این ترتیب تعریف می‌شود که قواعد حاکم بر عمل‌ها را مشخص می‌کنند بی آنکه به طبیعت اشیاء تحت تأثیر این عمل‌ها کار داشته باشند. به این ترتیب، یک ساختار می‌تواند روی اشیائی با طبیعت گوناگون بکار رود. مثلاً روی اعداد، روی توابع، روی تبدیلات هندسی و غیره. تجرید در ریاضیات عبارت است از صرف نظر یا روی گرداندن از طبیعت اشیاء تا آنجا که فقط

---

[۱] Felix Klein

[۲] Hermann Minkowski

[۳] le “continuum d’ espace-temps”

[۴] Einstein

[۵] Richard Dedekind

[۶] Leopold Kronecker

روابط اشیاء با هم مورد توجه قرار گیرد. این دیدگاه که از جبر ددکیند سر برآورده بود در طول قرن ۱۹ ناآشنا و گمنام رها شد تا آن که هیلبرت به آن صراحت بخشید.

یکی از ساختمان‌های ریاضی دانشگاه گوتینگن امروز (مؤسسهٔ ریاضیات کاربردی و عددی). بین سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۳۰، به یُمن تلاش‌های داوید هیلبرت گوتینگن برای ریاضیدانان مرکزی پرآوازه در سطح جهان بود. ریاضیدانان در این مرکز با فلاسفه و دانشمندان سایر رشته‌ها به مباحثه می‌پرداختند. (کلیشهٔ دانشگاه گوتینگن)

هیلبرت به نمایشی اصل موضوعی از هندسه می‌پردازد

به محض رسیدن به گوتینگن، هیلبرت به ارائهٔ یک درس هندسه اهتمام ورزید. این درس که بعداً با عنوان مبانی هندسه[۱] منتشر شد، بر روش جبر مجرد تکیه می‌کرد تا به اصل موضوعی‌سازی هندسه بپردازد. هیلبرت به مجردسازی طبیعت اشیاء هندسی، یعنی نقطه، خط و صفحه، می‌پردازد و به بیان (وضعِ) روابط بین آنها اکتفا می‌کند و ویژگی‌های این روابط را به صراحت در اصول موضوع بیان می‌نماید. به‌عبارت دیگر، اصولِ موضوع (اصل‌های وضع شده) ویژگی‌های روابط موجود بین اشیائی را بیان می‌کنند که طبیعت آنها عمداً نامشخص است. به این ترتیب، اصول موضوعِ هندسه، ساختاری شبیه ساختارهای جبری را معیّن می‌کنند. امّا از جبر تا هندسه، منزلت ساختار قویتر هم شده است. زیرا در جبر، ساختار را برای اشیائی که شناخته شده فرض می‌شد، نظیر اعداد و

[۱] Les fondements de géométrie چاپ سوم کتاب Grundlagen der Geometrie در ۱۹۰۹ و حل مسأله وارینگ جزء پدیده‌های برجستهٔ گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ فهرست شده‌است. مترجم.

توابع، در نظر می‌گرفتند. یک قضیه را هم می‌شد با استدلال بر مبنای ساختار به‌دست آورد و هم با استدلال روی اشیائی که طبیعت خاص خود را دارند. برعکس، در اصل موضوعی‌سازی، استدلال منحصر به استنتاج برمبنای اصول موضوع است ولاغیر، ضمناً اشیاء فقط با اصول موضوع تعریف شده‌اند. اصول موضوع، یا ساختار مورد بحث، هم برای تعریف این اشیاء و هم برای استدلال روی این اشیاء کفایت می‌کنند.

هیلبرت در اثنای پرداختن به اصل موضوعی‌سازی هندسه و در کارهای بعدیش، روش مجرد جبر را صراحت بخشید، آن را به شکل ریشه‌ای و رادیکال درآورد و از این امر در کسب نتایج جدید سود جست. در واقع، هیلبرت با چشم‌اندازی مجّرد، به سیر و سلوک در همهٔ ریاضیاتِ زمانِ خود می‌پردازد و آنها را دگرگون می‌سازد: هم هندسه را، هم جبر و نظریهٔ اعداد را، که در این زمینه نخستین اثبات «پندارهٔ وارینگ را در ۱۹۰۹ ارائه نمود، و هم آنالیز را، با آوردن فضاهای هیلبرت، که «نقاطِ» آن مثلاً توابع هستند. روش مجرد در گوتینگِن به وسیلهٔ اِمی نوتر[۱] و امیل آرتین [۲] و پس از آنها در فرانسه به وسیلهٔ گروهِ بورباکی [۳] دنبال می‌شود. از همین زمان به بعد، روش مجرد تمام ریاضیات را تغذیه می‌کند.

تأسیس مبنایی برای ریاضیات

به موازاتِ این کارها، هیلبرت روشِ مجرد را تا آنجا گسترش می‌دهد که برنامه‌ای برای مبنای ریاضیات طرح می‌کند. تأسیس مبنای ریاضیات به معنی آن است که استدلال‌های ریاضی جاودانه تضمین شوند. به ویژه باید استدلال‌هایی که با فرض یک بینهایتِ موجود بالفعل [۴] ارائه می‌شوند، یا استدلال‌های تَرامتناهی [۵]، توجیه شوند، و در عین حال، نسبت به فرض وجود بینهایت، خود نگه‌دار باشیم. برنامهٔ صورتگرا[۶] شامل دو مرحله است. نخستین مرحله، تلاش در جهت صوری کردن نظریه‌های ریاضی است. برای این کار، الفبایی از نمادها در نظر گرفته می‌شود، قاعده‌هایی تثبیت می‌شوند که شبیه

---

[۱] Emmy Noether

[۲] Emile Artin

[۳] Bourbaki

[۴] infini existant en acte

[۵] raisonnant transfinis

[۶] formaliste

قواعد املا و دستور زبان‌اند، تا به کمک این قواعد بتوانیم تشخیص دهیم یک فرمول چگونه ساخته می‌شود. از سوی دیگر، اصول موضوعی به صراحت بیان می‌شوند که نقش قضایای اولیه را در اثبات‌ها ایفا می‌کنند. نهایتاً قواعد استنتاج یک فرمول از فرمول یا فرمول‌های دیگر نیز در نظر گرفته می‌شود. انباری از فرمول‌ها جایگزین ریاضیات می‌شوند. یک اثبات مشتمل بر دستکاری نمادها بر طبق قواعدی مشخص و صریح، با انتزاع روی معنای نمادهاست. یک اثبات متشکل است از دسته‌ای از نمادها که به گونه‌ای سازگار طبق قواعدی مشخص کنار هم گذاشته می‌شوند، ترسیمِ یک شکل که آن هم طبق قواعدی معین و از قبل تعیین شده ساخته می‌شود. مرحلهٔ دوم، تلاش در جهت آن است که نشان دهد این دستگاه‌های صوری نامتناقض‌اند و این عمل با استدلال‌های متناهیانه [1] یعنی بدون دخالت بینهایت بالفعل، انجام پذیرد.

نخستین نظریه‌ای که هیلبرت سعی کرد برنامهٔ فوق را در مورد آن اجرا کند، حساب بود، که خود مشتمل بر استدلال‌های ترامتناهی است. بدین طریق، هیلبرت یک نظریهٔ اثبات [2] را ابداع کرد که عبارت از استدلال‌های متناهیانه بر روی شکل‌هایی است که نمایش دهندهٔ اثبات‌هایی در یک دستگاه صوری می‌باشند. با این وجود، در ۱۹۳۱، منطق‌دان اتریشی کورت گودِل [3] ثابت کرد که ممکن نیست که بتوان به وسیلهٔ استدلال‌هایی متناهیانه، نامتناض بودن دستگاهی صوری مشتمل بر حساب مقدماتی را ثابت کرد. بنابراین، باید از برنامهٔ آغازین هیلبرت چشم پوشید.

روش مجرد و برنامهٔ صورتگرا، فلاسفه را مجذوب کردند

اما این پیروزی بنام هیلبرت ثبت شد که او توانست مسأله‌ای فلسفی، یعنی مسألهٔ مبانی را، به یک مسألهٔ ریاضی تبدیل کند تا با روش مجرد و برخاسته از نظریه‌ای جدید، یعنی نظریهٔ اثبات، مورد بررسی قرار گیرد. نظریهٔ اثبات، امروز نیز نظریه‌ای زنده و فعال است. از طرف مقابل، روش مجرد و برنامهٔ صورتگرا که به طور ضمنی از آن مستفاد می‌شود، فلاسفه را به نحوی مسحور خویش ساختند. هوسرل در روش‌های منطقیِ ۱۹۰۱، و در منطق صوری و منطق متعالیِ [4] ۱۹۲۹، به گونه‌ای دربست و یکجا ارائهٔ مجرد ریاضیات

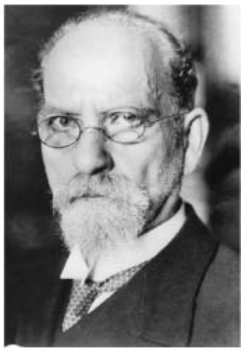
[1] finitiste

[2] Théorie de la démonstration

[3] Kurt Gödel

[4] Logique formelle et logique transcendantale

را در پدیده‌شناسی، که در دست زایش بود، به کار گرفت. هوسرل دو نوع ریاضیات را از هم تفکیک کرد، یکی ریاضیات کاربردی که مثلاً هندسه را به عنوان هندسهٔ فضای ما، یعنی فضایی که در آن زندگی می‌کنیم، در نظر می‌گیرد، و دیگری ریاضیات صوری.



ادموند هوسرل (۱۸۵۹ تا ۱۹۳۸) که از مسأله‌پردازی‌های ریاضی نیز برای برافراشتن بنای فلسفهٔ خویش بهره گرفت (کلیشه AKG).

بر مبنای یک نظریهٔ کاربردی، ریاضیدان به روشن نمودن معماریِ نظریه می‌پردازد و از آن یک دستگاه اصل موضوعی بیرون می‌کشد، که از آن پس، می‌تواند مشغول تغییر این دستگاه گردد تا صورت‌های جدیدی را برای نظریه‌های ممکن به دست آورد. به این شکل، ریاضیات صوری به منزلهٔ نظریه‌ای از صورت‌ها و نظریه‌ها ظاهر می‌شود، و یا با واژگان هوسرل به آپوفانتیک صوری [۱] می‌رسد، که هدف آن تعریف و رده‌بندی همهٔ سیستم‌های ممکنِ داوری است. به علاوه، همان گونه که هیلبرت نشان داده بود، فرایند اصل موضوعی به آن برمی‌گردد که طبیعت اشیاء را منتزع کنیم. در نتیجه، به هر صورت از نظریه‌ها، حوزه‌ای از اشیاء نظیر می‌شود که اشیائی دلخواهند و تنها با این صفت مشخص می‌گردند که از فلان دستگاه اصول موضوع تبعیت می‌کنند. پس، نظریهٔ صُوَرِ نظریه‌ها [۲] معرّفِ یک موجودشناسی صوری [۳] است، نظریه‌ای در مورد «شیء دلخواه» محض، که هدف آن، تعریف و رده‌بندی همهٔ اشیاء متنوع ممکن، فقط برحسب صورت آنهاست. ریاضیات صوری مشتمل بر دو جهت است: هنگامی که ریاضیدان متوجه دستگاه‌های

[۱] apophantique formelle

[۲] théorie des formes de Théories

[۳] ontologie formelle

داوری است، ریاضیات صوری در جهت آپوفانتیک صوری است؛ هنگامی که ریاضیدان متوجه حوزه‌های اشیاء است، ریاضیات صوری در جهت موجودشناسی صوری است. هر چند هوسرل با دقت هندسهٔ قرن ۱۹ را مطالعه کرده بود و مفاهیمی از صورت نظریه‌ها و تنوع صوری پیش از ۱۹۰۱ را نیز می‌شناخت، اما شکی نیست که ملاقات او با هیلبرت و مباحثاتی که در انجمن ریاضی گوتینگن برگزار شد، نقشی تعیین کننده در راه‌اندازی یک پدیده‌شناسی منظم ایفا کرده‌اند.

هیلبرت موفق شد که در درون ریاضیات مسالهٔ مبنای ریاضیات را مطرح کند، که درونی‌سازی یک مسألهٔ فلسفی در ریاضیات است. هوسرل درونی‌سازی وارون را اجرا کرد، یعنی روش مجرد ریاضیات را در فلسفه اعمال کرد. عملکرد و سلوک این دو شخصیت، هوسرلِ فیلسوف و هیلبرتِ ریاضیدان، شاهد درونی‌سازی ریاضیات در فلسفه و درونی‌سازی فلسفه در ریاضیات است، که هم وارون یکدیگرند و هم یاور یکدیگر.

پیرکاسو ــ نوگِس
مرکز ملی تحقیقات علمی
آزمایشگاه دانش و متون، دانشگاه لیل ۳

چند مرجع

- P. Cassou-Noguès, *Hilbert* (Les Belles Lettres, 2001).
- P. Cassou-Noguès, *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès* (Vrin, 2001).
- J.-T. Desanti, *La philosophie silencieuse* (Seuil, 1975).
- D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen* (Springer, Berlin, 1931-35).
- E. Husserl, *Recherches logiques* (tr. fr. H. Elie, A. L. Kelkel et R. Schérer, P.U.F. , 1959).
- C. Reid, *Hilbert* (Springer, 1970).
- H. Sinaceur,*Corps et modèles* (Vrin, 1991).

Pierre Cassou-Noguès
CNRS, Laboratoire Savoirs et Textes,
Université Lille III