فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۵۵ تا ۷۱

درون جبری (نسبی) در فضاهای برداری

الهام کیانی و مجید سلیمانی دامنه

چکیده

در فضاهای برداری لزوماً نمی‌توان از مفهوم همسایگی صحبت کرد و لذا درون توپولوژیکی در این فضاها معنایی ندارد. به همین دلیل، در فضاهای برداری، مفاهیمی مانند درون جبری [۱] و درون جبری نسبی [۲] جایگزین مفهوم درون توپولوژیکی می‌شوند. در این مقاله، برخی خواص پایه‌ای این درون‌های تعمیم‌یافته را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. علاوه بر مطالعهٔ خواص این تعاریف جبری، رابطهٔ بین آن‌ها و برخی مفاهیم توپولوژیکی را بررسی می‌نماییم. با توجه به این‌که مخروط‌ها نقش مهمی در بهینه‌سازی و آنالیز محدب ایفا می‌کنند، یکی از اهداف اصلی این مقاله، مرور ویژگی‌های درون جبری (نسبی) مخروط‌هاست. همچنین مثال‌هایی برای روشن‌تر شدن مباحث این نوشتار آورده‌ایم. سرانجام، به کاربرد این مفاهیم جبری در بهینه‌سازی برداری پرداخته‌ایم.

واژه‌های کلیدی: فضاهای برداری، درون جبری (نسبی)، تحدب، بهینه‌سازی.

۱. مقدمه

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $S \subseteq X$، نقطهٔ $x \in S$ را نقطهٔ درونی مجموعهٔ S می‌نامیم اگر یک همسایگی از x مشمول در S وجود داشته باشد. تاکنون قضایا و مسائل مهمی در فضاهای توپولوژیک به‌کمک مفهوم درون توپولوژیکی بیان و اثبات شده‌اند. با توجه به این که فضاهای برداری رده‌ای وسیع‌تر از فضاهای برداری توپولوژیک هستند، طبیعی است که بتوان دستهٔ وسیع‌تری

1) Algebraic interior 2) Relative algebraic interior

از مسائل را در این فضاها مورد مطالعه قرار داد. چون در این فضاها هیچ توپولوژیی در نظر گرفته نمی‌شود، باید مفهوم جدیدی جایگزین مفهوم درون توپولوژیکی گردد. درون جبری و درون جبری نسبی که به‌صورت کاملاً جبری و بدون استفاده از مفاهیم توپولوژیکی تعریف می‌شوند، می‌توانند جایگزین مناسبی برای درون توپولوژیکی در فضاهای برداری باشند.

پس از آن‌که مفهوم درون جبری معرفی گردید، برخی خواص و کاربردهای آن توسط محققین متعددی مورد مطالعه قرار گرفت. به‌عنوان مثال، در دهۀ هشتاد میلادی در شاخۀ بهینه‌سازی به‌کمک مفهوم درون جبری مخروط‌های محدب، برخی نتایج و قضایا از فضاهای توپولوژیک به فضاهای برداری تعمیم داده شدند. مثال‌هایی وجود دارد که نشان می‌دهند ممکن است درون جبری یک مجموعۀ محدب تهی باشد (مثال ۴ را ببینید). برای غلبه بر این مشکل، شی[۱]، هو[۲] و منگ[۳] در [۱۲] و [۱۶] مفهوم درون جبری نسبی را به‌عنوان تعمیمی از درون جبری معرفی کردند. اهمیت این تعریف از آن جهت است که درون جبری، زیرمجموعۀ درون جبری نسبی است و در بسیاری از مواردی که درون جبری تهی است با در نظر گرفتن درون جبری نسبی می‌توان مشکل را حل نمود (مثال ۴ را ببینید).

در سال‌های اخیر، از این مفاهیم در بهینه‌سازی برداری استفاده‌های فراوانی شده است. آدان[۴] و نووو[۵] در [۲] و [۳] مفاهیم کارایی سره و کارایی ضعیف را با استفاده از مفاهیم درون جبری و درون جبری نسبی در فضاهای برداری بیان کرده‌اند. همچنین به‌کمک این مفاهیم، برخی قضایای جداسازی را در فضاهای برداری بیان و اثبات نموده‌اند. هرناندز[۶] و همکارانش در [۱۰] مفهوم نگاشت مجموعه ـ مقدار زیرشبه‌محدب را معرفی می‌کنند و به‌کمک این مفهوم و درون جبری نسبی شرایط بهینگی و قاعدۀ ضرایب لاگرانژ را به‌دست می‌آورند.

در این مقاله، درون جبری و درون جبری نسبی را تعریف می‌کنیم و رابطۀ بین آن‌ها و درون توپولوژیکی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس برخی خواص اساسی آن‌ها را بیان و اثبات می‌نماییم. خواص بیشتر و کاربردهای این مفاهیم را می‌توان در مراجع [۲]، [۳] و [۱۷] یافت. علاوه بر این، به کاربردهای این مفاهیم جبری در بهینه‌سازی اشاره می‌کنیم. نقاط کارا، کارای ضعیف و کارای سرۀ برداری را معرفی کرده، برخی شرایط لازم و کافی برای تشخیص نقاط کارای ضعیف و کارای سره برداری را در قالب قضایایی بیان می‌کنیم.

معمولاً برای مرتب کردن فضاهای برداری از مخروط‌ها استفاده می‌شود. در این مقاله، با در نظر گرفتن مخروط K از ترتیب زیر استفاده می‌کنیم:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

1) Shi 2) Hu 3) Meng 4) Adan 5) Novo 6) Hernandez

در سراسر این مقاله، X را یک فضای برداری حقیقی در نظر می‌گیریم. $A \subseteq X$ رامخروط غیربدیهی می‌نامیم اگر

$$\{\circ\} \neq A \neq X \quad \& \quad \alpha A \subseteq A\,, \quad \forall \alpha \geq \circ.$$

مجموعهٔ A را محدب گوییم اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشم $[a,b] \subseteq A$. برای $\alpha \in (\circ, ۱)$، مجموعهٔ A راαـ محدب گوییم در صورتی که

$$a, b \in A \;\Rightarrow\; \alpha a + (۱-\alpha) b \in A.$$

اگر $\alpha \in (\circ, ۱)$ وجود داشته باشد به‌طوری که A، αـ محدب باشد، آن‌گاه A را تقریباً محدب[1] گوییم.

تعریف ۱. ([۴]) مخروط تولید شده توسط مجموعهٔ A مجموعهٔ بردارهای αa است که $\alpha \geq \circ$ و $a \in A$. غلاف محدب A مجموعهٔ ترکیب‌های خطی محدب تعداد متناهی از اعضای A است. غلاف آفین A مجموعهٔ ترکیب‌های خطی تعداد متناهی از اعضای A است به‌طوری که مجموع ضرایب برابر با ۱ باشد. پوستهٔ خطی A مجموعه ترکیب‌های خطی تعداد متناهی از اعضای A است. این‌ها را به‌ترتیب با $\operatorname{cone}(A)$، $\operatorname{conv}(A)$، $\operatorname{aff}(A)$ و $\operatorname{span}(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $L(A) = \operatorname{span}(A - A)$.

تعریف ۲. ([۳]) مخروط K را نوکدار گوییم هرگاه $K \cap (-K) = \{\circ\}$.

تعریف ۳. ([۳]) درون جبری و درون جبری نسبی مجموعهٔ $A \subseteq X$ به‌ترتیب، عبارت است از

$$\operatorname{cor}(A) = \{x \in A \;:\; \forall x' \in X \;,\; \exists \lambda' > \circ \;;\; \forall \lambda \in [\circ, \lambda'] \;,\; x + \lambda x' \in A\},$$
$$\operatorname{icr}(A) = \{x \in A \;:\; \forall x' \in L(A) \;,\; \exists \lambda' > \circ \;;\; \forall \lambda \in [\circ, \lambda'] \;,\; x + \lambda x' \in A\}.$$

اگر $\operatorname{cor}(A) \neq \emptyset$، A را توپر[2] و اگر $\operatorname{icr}(A) \neq \emptyset$، A را به‌طور نسبی توپر[3] می‌نامیم.

طبق لم ۱.۲ در [۱۷]، برای هر $x \in A$ داریم $aff(A) = x + L(A)$. لذا می‌توان درون جبری نسبی مجموعهٔ A را به‌صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$\operatorname{icr}(A) = \{x \in A \;:\; \forall x' \in aff(A) - x \;,\; \exists \lambda' > \circ \;;\; \forall \lambda \in [\circ, \lambda'] \;,\; x + \lambda x' \in A\}.$$

اگر $\circ \in A$، آن‌گاه $L(A) = \operatorname{aff}(A)$. لذا با فرض $\circ \in A$ داریم

$$\operatorname{icr}(A) = \{x \in A \;:\; \forall x' \in \operatorname{aff}(A) \;,\; \exists \lambda' > \circ \;;\; \forall \lambda \in [\circ, \lambda'] \;,\; x + \lambda x' \in A\}.$$

در برخی از مقالاتی که به مطالعهٔ icr پرداخته‌اند، به‌جای $L(A)$ در تعریف این مفهوم، از $\operatorname{aff}(A)$ استفاده شده است. استفاده از $\operatorname{aff}(A)$ می‌تواند منجر به نتایجی متفاوت با آنچه که در این مقاله به آن‌ها پرداخته‌ایم، گردد ([۵] را ببینید).

1) Nearly convex 2) Solid 3) Relativly solid

۲. خواص درون جبری و درون جبری نسبی

به‌طور کلی برای مجموعهٔ دلخواه A، $\operatorname{cor}(A) \subseteq \operatorname{icr}(A) \subseteq A$. در مثال زیر نشان می‌دهیم که رابطهٔ $\operatorname{cor}(A) \subseteq \operatorname{icr}(A)$ می‌تواند اکید باشد. در مثال ۴، $\operatorname{ri}(A)$ درون نسبی A است. $x_\circ \in \operatorname{ri}(A)$ هرگاه یک همسایگی مبدأ مانند U وجود داشته باشد به‌طوری که $(x_\circ + U) \cap \operatorname{aff}(A) \subseteq A$.

مثال ۴. اگر A را پاره‌خط واصلِ دو نقطهٔ a و b در فضای $\mathbb{R}^۲$ در نظر بگیریم به‌طوری که $\circ \in A$، آن‌گاه $L(A) = \operatorname{aff}(A)$. از طرفی، $\operatorname{aff}(A)$ خط گذرنده از a و b است. بنابراین داریم

$$\operatorname{icr}(A) = \{\lambda a + (۱ - \lambda)b \ : \ \lambda \in (\circ, ۱)\} = A \backslash \{a, b\}.$$

یعنی درون جبری نسبی مجموعهٔ A برابر است با پاره‌خط واصلِ دو نقطهٔ a و b به‌جز نقاط انتهایی. اما درون جبری مجموعهٔ A تهی است، زیرا برای هر $x' \in X \backslash \operatorname{aff}(A)$ نمی‌توان $\lambda' > \circ$ پیدا کرد که $x + \lambda x' \in A$ برای هر $\lambda \in (\circ, \lambda']$. بنابراین $\operatorname{cor}(A) = \emptyset$ و لذا $\operatorname{cor}(A) \neq \operatorname{icr}(A)$. در اینجا، از تعریف درون جبری واضح است که $\operatorname{ri}(A) = \operatorname{icr}(A)$ و لذا $\operatorname{ri}(A) \neq \operatorname{cor}(A)$. همچنین $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. بنابراین $\operatorname{ri}(A) \neq \operatorname{int}(A)$ و $\operatorname{icr}(A) \neq \operatorname{int}(A)$.

قضایای ۵ و ٦ به ارتباط بین درون جبری (نسبی) و درون (نسبی) در فضاهای توپولوژیک می‌پردازند. این دو قضیه نشان می‌دهند که در فضاهای برداری توپولوژیک، اگر درون (نسبی) تهی باشد، ممکن است بتوان با استفاده از درون جبری (نسبی)، مشکل را برطرف نمود.

نتیجه‌ای مشابه قضیهٔ ۵ در فصل اولِ [۵] دیده می‌شود، با این تفاوت که در [۵] در تعریف icr از $\operatorname{aff}(A)$ به‌جای $L(A)$ استفاده شده است و لذا اثبات‌ها متفاوت هستند.

قضیه ۵. اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$، آن‌گاه $\operatorname{ri}(A) \subseteq \operatorname{icr}(A)$.

برهان. فرض کنید $x_\circ \in ri(A)$. همسایگی مانند U از صفر وجود دارد که

$$(x_\circ + U) \cap \operatorname{aff}(A) \subseteq A.$$

طبق قضیهٔ ۱۴.۱ در [۱۵]، U شامل همسایگی متعادلی از صفر است. برای سادگی فرض می‌کنیم U همسایگی متعادلی از صفر باشد. باید ثابت کنیم

$$\forall x' \in L(A) = \operatorname{aff}(A) - x_\circ \ , \ \ \exists \lambda' > \circ \ \ ; \ \ x_\circ + \lambda x' \in A \quad \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

به این منظور، کافی است نشان دهیم $\lambda' > \circ$ وجود دارد که

$$x_\circ + \lambda x' \in (x_\circ + U) \cap \operatorname{aff}(A) \qquad \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

از قضیهٔ ۱۵.۱ در [۱۵] می‌دانیم $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$ و چون $x' \in X$، داریم

$$\exists n_\circ \in \mathbb{N} \ \ ; \ \ x' \in n_\circ U.$$

اگر قرار دهیم $\lambda' = \frac{1}{n_\circ}$، آن‌گاه $\lambda n_\circ \leq 1$ برای هر $\lambda \in [\circ, \lambda']$. بنابراین با توجه به متعادل بودن U داریم $\lambda x' \in \lambda n_\circ U \subseteq U$ و در نتیجه $\lambda x' \in U$. از این‌رو $x_\circ + \lambda x' \in x_\circ + U$. از طرفی، چون $x' \in \text{aff}(A) - x_\circ$، بردارهای $a_i \in A$ و اعداد حقیقی λ_i، n، $i = 1, \ldots, n$ وجود دارند به‌طوری که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ و $x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i - x_\circ$. در نتیجه

$$x_\circ + \lambda x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i a_i - \lambda x_\circ + x_\circ \in \text{aff}(A),$$

زیرا $\lambda(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1) + 1 = 1$ و $x_\circ, a_i \in A$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$. پس $x_\circ + \lambda x' \in \text{aff}(A)$ و لذا

$$x_\circ + \lambda x' \in (x_\circ + U) \cap \text{aff}(A).$$

به این ترتیب، $x_\circ + \lambda x' \in A$ و این یعنی $x_\circ \in \text{icr}(A)$. پس نشان داده‌ایم که $\text{ri}(A) \subseteq \text{icr}(A)$.

قضیه ٦. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت

الف) $\text{int}(A) \subseteq \text{cor}(A)$؛

ب) اگر A محدب باشد و $\text{int}(A) \neq \emptyset$، آن‌گاه $\text{int}(A) = \text{cor}(A)$.

اثبات قضیهٔ ٦ را می‌توان در فصل اول [۵] ملاحظه نمود. به‌علاوه، اثباتی با جزئیات بیشتر در [۱۴] آورده شده است.

اگر X یک فضای متناهی ــ بعد و $A \subseteq X$ مجموعه‌ای محدب باشد، آن‌گاه $\text{ri}(A) = \text{icr}(A)$ و $\text{int}(A) = \text{cor}(A)$ ([۸]). مثال ۷ وضعیتی را نشان می‌دهد که در یک فضای نامتناهی ــ بعد هر چهار مجموعهٔ icr، ri، cor و int تهی هستند.

مثال ۷ ([۸]). فرض کنید $p \in [1, +\infty)$ دلخواه باشد. فضای باناخ $l^p = l^p(\mathbb{N})$ متشکل از دنباله‌های اعداد حقیقی $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ با نرم $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد

$$\text{int}(l^p_+) = \text{ri}(l^p_+) = \text{icr}(l^p_+) = \text{cor}(l^p_+) = \emptyset$$

که در آن، l^p_+ مخروط مثبت l^p است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l^p_+ = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p \ : \ \ x_n > \circ \ , \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

مثال‌های ۸ و ۹ تفاوت بین cor و int را نشان می‌دهند و مثال ۱۰ که در یک فضای نامتناهی ــ بعد طراحی شده است، تفاوت بین ri و icr را روشن می‌سازد.

مثال ۸. اگر $X = \mathbb{R}^2$ و $A = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\} \backslash \{(x,y) \ : \ x > \circ \ , \ y = x^2\}$، آن‌گاه $\text{cor}(A) = A$ در حالی که $\text{int}(A) = A \backslash \{\circ\}$. بنابراین $\text{int}(A) \neq \text{cor}(A)$.

مثال ۹. فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$ و $A = \{(x_1, x_2) \ : \ x_2 \geq x_1^2\} \cup \{(x_1, x_2) \ : \ x_2 \leq 0\}$. در این صورت، $0 \in \operatorname{cor}(A)$ اما $0 \notin \operatorname{int}(A)$. لذا $\operatorname{int}(A) \neq \operatorname{cor}(A)$.

مثال ۱۰. فرض کنید X فضای همهٔ توابع حقیقی‌مقدار مشتق‌پذیر روی $[0, 1]$ با نرم

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

باشد. تابع $T : X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $T(f) = f'(0)$ تعریف می‌کنیم. T تابعی خطی است اما پیوسته نیست ([۱۴]). مجموعهٔ A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{f \in X \ : \ T(f) = f'(0) > 0\}.$$

$f \in A$ و $f_0 \in L(A)$ را در نظر بگیرید. اگر $f_0'(0) \geq 0$، آن‌گاه برای هر $\lambda \geq 0$ داریم

$$f'(0) + \lambda f_0'(0) > 0.$$

بنابراین $f + \lambda f_0 \in A$ برای هر $\lambda \geq 0$. در حالت $f_0'(0) < 0$ با در نظر گرفتن $\lambda' \in (0, \frac{-f'(0)}{f_0'(0)})$ به‌دست می‌آوریم

$$f'(0) + \lambda f_0'(0) > 0 \ , \quad \forall \lambda \in [0, \lambda']$$

و لذا $f \in \operatorname{icr}(A)$. در نتیجه $\operatorname{icr}(A) = A$. اما اگر تابع $\overline{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $\overline{f}(x) = x$ تعریف کنیم، آن‌گاه $\overline{f} \in A$ و $\overline{f} \notin ri(A)$، زیرا در غیر این صورت، گوی $B_\varepsilon(\overline{f})$ به مرکز $\overline{f}$ و شعاع $\varepsilon > 0$ وجود دارد که

$$B_\varepsilon(\overline{f}) \cap \operatorname{aff}(A) \subseteq A.$$

اکنون اگر تعریف کنیم $f_\varepsilon(x) = \frac{x}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\sin(nx) + \frac{x}{2}$ که در آن، $n > \frac{2}{\varepsilon}$، آن‌گاه داریم

$$f_\varepsilon \in L(A) + \frac{\overline{f}}{2} = \operatorname{aff}(A).$$

از طرفی، $\|f_\varepsilon - \overline{f}\| < \varepsilon$. بنابراین $f_\varepsilon \in B_\varepsilon(\overline{f}) \cap \operatorname{aff}(A)$ در حالی که

$$f_\varepsilon'(0) = 1 - \frac{n\varepsilon}{2}(\cos(0)) < 0$$

و این با $f_\varepsilon(x) \in A$ تناقض دارد. لذا $\overline{f} \notin \operatorname{ri}(A)$. پس $\operatorname{ri}(A) \neq A$ و از این‌رو $\operatorname{ri}(A) \neq \operatorname{icr}(A)$.

قضیهٔ زیر به برخی خواص درون جبری نسبی مخروط‌ها در فضاهای برداری می‌پردازد.

قضیه ۱۱. ([۹]) اگر K مخروطی محدب با درون جبری نسبی ناتهی $(icr(K) \neq \emptyset)$ باشد، آن‌گاه $\operatorname{icr}(K) \cup \{0\}$ نیز مخروطی محدب است و

i) $\operatorname{icr}(K) + K = \operatorname{icr}(K)$؛

ii) $\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)) = \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K) \cup \{0\}) = \operatorname{icr}(K)$.

برهان. اگر $x_\circ \in \mathrm{icr}(K)$ و $\alpha > \circ$ دلخواه باشند، برای اثبات مخروط بودنِ $\mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ کافی است ثابت کنیم که

$$\alpha x_\circ \in \mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}.$$

بنابر تعریفِ $\mathrm{icr}(K)$ به‌ازای هر $x' \in L(K)$ عدد $\lambda' > \circ$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\lambda \in [\circ, \lambda']$ داریم $x_\circ + \lambda x' \in K$. چون K مخروط است، $\alpha(x_\circ + \lambda x') \in K$. اگر قرار دهیم $\lambda'' = \alpha\lambda'$، آن‌گاه $\lambda'' > \circ$ و برای هر $\lambda \in [\circ, \lambda'']$ داریم $\frac{\lambda}{\alpha} \in [\circ, \lambda']$. لذا

$$\alpha x_\circ + \lambda x' = \alpha(x_\circ + \frac{\lambda}{\alpha}x') \in K \ , \ \ \forall x' \in L(K) \ , \ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'']$$

و در نتیجه $\alpha x_\circ \in \mathrm{icr}(K)$. بنابراین $\mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ مخروط است. برای اثبات محدب بودن این مجموعه، بردارهای $x_۱, x_۲ \in \mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ و $\theta \in (\circ, ۱)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x_۱, x_۲ \in \mathrm{icr}(K)$، داریم

$$x_۱ \in \mathrm{icr}(K) \ \Rightarrow \ \forall x \in L(K) \ \ \exists \lambda'_۱ > \circ \ ; \ \ x_۱ + \lambda_۱ x \in K \qquad \forall \lambda_۱ \in [\circ, \lambda'_۱],$$
$$x_۲ \in \mathrm{icr}(K) \ \Rightarrow \ \forall x \in L(K) \ \exists \lambda'_۲ \ > \circ \ ; \ \ x_۲ + \lambda_۲ x \in K \qquad \forall \lambda_۲ \in [\circ, \lambda'_۲].$$

با در نظر گرفتن $x \in L(K)$ و قرار دادن $\lambda'' = \min\{\lambda'_۱, \lambda'_۲\}$، چون K مخروطی محدب است، به‌دست می‌آوریم

$$\theta(x_۱ + \lambda x) + (۱ - \theta)(x_۲ + \lambda x) \in K \ , \ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'']$$
$$\Rightarrow \ \forall x \in L(K) \ , \ \ \exists \lambda'' > \circ \ ; \ \ \theta x_۱ + (۱ - \theta)x_۲ + \lambda x \in K \ , \ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'']$$
$$\Rightarrow \ \theta x_۱ + (۱ - \theta)x_۲ \in \mathrm{icr}(K).$$

اگر $x_۱ = \circ$ یا $x_۲ = \circ$، آن‌گاه $\theta x_۱ + (۱ - \theta)x_۲ \in \mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$، زیرا $\mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ مخروط است. بنابراین $\mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ محدب است. اکنون (i) را ثابت می‌کنیم. چون K یک مخروط است و $\circ \in K$، پس

$$\mathrm{icr}(K) = \mathrm{icr}(K) + \{\circ\} \subseteq \mathrm{icr}(K) + K.$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $\mathrm{icr}(K) + K \subseteq \mathrm{icr}(K)$. بدین منظور، $x \in \mathrm{icr}(K) + K$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$x \in \mathrm{icr}(K) + K \ \Rightarrow \ \exists (y \in \mathrm{icr}(K) \ , \ k \in K) \ ; \ \ x = y + k.$$

از این‌که $y \in icr(K)$ نتیجه می‌گیریم

$$\forall z \in L(K) \ \ , \ \ \exists \lambda' > \circ \ \ ; \ \ y + \lambda z \in K \ \ , \ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

چون K مخروط محدب است، $y + \lambda z + k \in K$. پس $x + \lambda z \in K$ و لذا

$$\forall z \in L(K) \ , \ \ \exists \lambda' > \circ \ ; \ \ x + \lambda z \in K \ , \ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

بنابراین $x \in \operatorname{icr}(K)$. پس $\operatorname{icr}(K) + K \subseteq \operatorname{icr}(K)$ و در نتیجه $\operatorname{icr}(K) + K = \operatorname{icr}(K)$. حال (ii) را ثابت می‌کنیم. واضح است که $\operatorname{icr}(K) \subseteq \operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\}$ لذا

$$\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)) \subseteq \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\}).$$

همچنین $\operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\} \subseteq K$ و از این‌رو

$$\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\}) \subseteq \operatorname{icr}(K).$$

در نتیجه

$$\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)) \subseteq icr(icr(K) \cup \{\circ\}) \subseteq \operatorname{icr}(K) \tag{۱}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$\operatorname{icr}(K) \subseteq \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)).$$

بدین منظور، $x \in \operatorname{icr}(K)$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\forall x' \in L(K) \quad , \quad \exists \lambda' > \circ \quad ; \quad x + \lambda x' \in K \quad , \quad \forall \lambda \in [\circ, \lambda']. \tag{۲}$$

چون K مخروط است، برای هر $\lambda \in [\circ, \frac{\lambda'}{۲}]$ داریم $\frac{x}{۲} + \lambda x' \in K$ و در نتیجه $\frac{x}{۲} \in \operatorname{icr}(K)$. حال از قسمت (i) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{x}{۲} + \frac{x}{۲} + \lambda x' \in \operatorname{icr}(K) + K = \operatorname{icr}(K).$$

بنابراین $x + \lambda x' \in \operatorname{icr}(K)$. از طرفی، اگر $x' \in L(\operatorname{icr}(K))$ باشد، آن‌گاه چون $\operatorname{icr}(K) \subseteq K$ پس $L(\operatorname{icr}(K)) \subseteq L(K)$ و لذا $x' \in L(K)$. بنابر (۲) $x \in \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K))$ و در نتیجه

$$\operatorname{icr}(K) \subseteq \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)).$$

از این و (۱) نتیجه می‌شود $\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)) = \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\}) = \operatorname{icr}(K)$.

به روش مشابه ثابت می‌شود که اگر K مخروطی محدب باشد و $\operatorname{cor}(K) \neq \emptyset$، آن‌گاه $\operatorname{cor}(K) \cup \{\circ\}$ نیز مخروطی محدب است و $\operatorname{cor}(\operatorname{cor}(K)) = \operatorname{cor}(K)$.

در لم زیر، درون جبری نسبی مجموع دو مخروط محدب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۱۲. ([۱]) فرض کنید S و T مخروط‌هایی محدب در فضای برداری X باشند که درون جبری نسبی آن‌ها ناتهی است. در این صورت،

$$\operatorname{icr}(S + T) = \operatorname{icr}(S) + \operatorname{icr}(T) = \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(S) \cup \{\circ\} + T).$$

برهان. به‌سادگی می‌توان نشان داد $\operatorname{aff}(S+T)=\operatorname{aff}(S)+\operatorname{aff}(T)$. چون

$$T\subseteq T+S\,,\quad S\subseteq S+T$$

بنابراین اگر $s\in\operatorname{icr}(S)$، $t\in\operatorname{icr}(T)$ و $v=v_1+v_2\in\operatorname{aff}(S+T)$ که در آن، $v_1\in\operatorname{aff}(S)$ و $v_2\in\operatorname{aff}(T)$، آن‌گاه با توجه به تعریف، $\lambda_2'>0$ و $\lambda_1'>0$ وجود دارند به‌طوری که

$$s+\lambda_1v_1\in S\,,\ \ t+\lambda_2v_2\in T\,,\ \ \forall\lambda_1\in[0,\lambda_1']\,,\ \ \forall\lambda_2\in[0,\lambda_2'].$$

قرار می‌دهیم $\lambda_3'=\min\{\lambda_1',\lambda_2'\}$. در این صورت،

$$s+t+\lambda_3(v_1+v_2)\in S+T\ \ ,\ \ \forall\lambda_3\in[0,\lambda_3']$$

و لذا $s+t\in\operatorname{icr}(S+T)$. از اینجا به‌دست می‌آوریم $\operatorname{icr}(S)+\operatorname{icr}(T)\subseteq\operatorname{icr}(S+T)$. برعکس، $s+t\in\operatorname{icr}(S+T)$ را که در آن، $s\in S$ و $t\in T$ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم $s'\in\operatorname{icr}(S)$. چون $\operatorname{icr}(S+T)\cup\{0\}$ مخروط است، داریم $\frac{s+t}{2}\in\operatorname{icr}(S+T)$. از طرف دیگر، $-s'\in L(S+T)$. لذا $k'>0$ وجود دارد که

$$\frac{s+t}{2}+k(-s')\in S+T\ \ ,\ \ \forall k\in[0,k'].$$

بنابر قسمت (i) قضیهٔ ۱۱،

$$\frac{s+t}{2}\in S+T+\operatorname{icr}(S)\subseteq\operatorname{icr}(S)+T.$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $\frac{(s+t)}{2}\in S+\operatorname{icr}(T)$. بنابراین

$$(s+t)\in\operatorname{icr}(S)+T+S+\operatorname{icr}(T)=\operatorname{icr}(S)+\operatorname{icr}(T)$$

و لذا $\operatorname{icr}(S+T)\subseteq\operatorname{icr}(S)+\operatorname{icr}(T)$. برای اثبات رابطهٔ دوم، به‌موجب قسمت (ii) قضیهٔ ۱۱، $\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(S)\cup\{0\})=\operatorname{icr}(S)$. بنابراین از قسمت قبل نتیجه می‌گیریم

$$\operatorname{icr}((\operatorname{icr}(S)\cup\{0\})+T)=\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(S)\cup\{0\})+\operatorname{icr}(T)=\operatorname{icr}(S)+\operatorname{icr}(T)=\operatorname{icr}(S+T).$$

در لم زیر، درون جبری نسبی حاصل‌ضرب دو مخروط محدب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۱۳. ([۱۶]) اگر K_1 و K_2 دو مخروط محدب غیربدیهی در فضاهای برداری X و Z باشند که $\operatorname{icr}(K_1)\neq\emptyset$ و $\operatorname{icr}(K_2)\neq\emptyset$، آن‌گاه

$$\operatorname{icr}(K_1\times K_2)=\operatorname{icr}(K_1)\times\operatorname{icr}(K_2).$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathrm{icr}(K_1)\times\mathrm{icr}(K_2)\subseteq\mathrm{icr}(K_1\times K_2)$. بدین منظور،

$$(k_1,k_2)\in\mathrm{icr}(K_1)\times\mathrm{icr}(K_2)$$

را در نظر می‌گیریم. واضح است که $(k_1,k_2)\in K_1\times K_2$. اگر $(v_1,v_2)\in\mathrm{aff}(K_1\times K_2)$، آن‌گاه

$$(v_1,v_2)\in\mathrm{aff}(K_1)\times\mathrm{aff}(K_2).$$

از این‌که $k_1\in\mathrm{icr}(K_1)$ و $v_1\in\mathrm{aff}(K_1)$، به‌دست می‌آوریم

$$\exists\lambda_1'>0\;\;;\;\;k_1+\lambda v_1\in K_1\;\;,\;\;\forall\lambda\in[0,\lambda_1'].$$

و به‌طور مشابه، از این‌که $k_2\in\mathrm{icr}(K_2)$ و $v_2\in\mathrm{aff}(K_2)$ نتیجه می‌گیریم

$$\exists\lambda_2'>0\;\;;\;\;k_2+\lambda v_2\in K_2\;\;,\;\;\forall\lambda\in[0,\lambda_2'].$$

اگر $\lambda''=\min\{\lambda_1',\lambda_2'\}$ انتخاب کنیم، آن‌گاه

$$(k_1,k_2)+\lambda(v_1,v_2)\in K_1\times K_2\quad,\quad\forall\lambda\in[0,\lambda''],$$

و این یعنی $(k_1,k_2)\in icr(K_1\times K_2)$. بنابراین $\mathrm{icr}(K_1)\times\mathrm{icr}(K_2)\subseteq\mathrm{icr}(K_1\times K_2)$. حال نشان می‌دهیم $\mathrm{icr}(K_1\times K_2)\subseteq\mathrm{icr}(K_1)\times\mathrm{icr}(K_2)$. چون $\mathrm{icr}(K_2)\neq\emptyset$ و $\mathrm{icr}(K_1)\neq\emptyset$ لذا $\mathrm{icr}(K_1\times K_2)\neq\emptyset$. از این‌رو

$$(k_1,k_2)\in\mathrm{icr}(K_1\times K_2)$$

را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح $(k_1,k_2)\in K_1\times K_2$. اگر

$$(v_1,v_2)\in\mathrm{aff}(K_1)\times\mathrm{aff}(K_2),$$

آن‌گاه $(v_1,v_2)\in\mathrm{aff}(K_1\times K_2)$. بنابراین $\lambda'>0$ وجود دارد که

$$(k_1,k_2)+\lambda(v_1,v_2)\in K_1\times K_2\quad,\quad\forall\lambda\in[0,\lambda'].$$

در نتیجه $k_2+\lambda v_2\in K_2$ و $k_1+\lambda v_1\in K_1$. پس $(k_1,k_2)\in\mathrm{icr}(K_1)\times\mathrm{icr}(K_2)$.

قضیه ۱۴. ([۱۷]) اگر K یک مخروط نوکدار و غیربدیهی در X باشد، آن‌گاه $0\notin\mathrm{icr}(K)$.

برهان. فرض کنیم $0\in\mathrm{icr}(K)$. اگر $x'\in\mathrm{aff}(K)$، آن‌گاه با توجه به تعریفِ icr داریم $x'\in K$. بنابراین $\mathrm{aff}(K)\subseteq K$. از طرف دیگر، $K\subseteq\mathrm{aff}(K)$ و لذا $K=\mathrm{aff}(K)$. چون

روشن است که $\mathrm{aff}(K)$ و $\mathrm{span}(K)$. در واقع، از تعریفِ $\mathrm{aff}(K) = \mathrm{span}(K)$، پس $\circ \in K$ $\mathrm{aff}(K) \subseteq \mathrm{span}(K)$. حال فرض می‌کنیم $x \in span(K)$. در این صورت

$$\exists(n \in \mathbb{N} \ , \ \ k_i \in K \ , \ \alpha_i \in \mathbb{R} \ \ i = ۱, ۲, ..., n) \ \ ; \ \ x = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i k_i.$$

اگر قرار دهیم $\alpha = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i$، آن‌گاه

$$x = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i k_i + (۱ - \alpha)\circ$$

که در آن، $\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i + (۱ - \alpha) = ۱$. لذا $x \in \mathrm{aff}(K)$ و بنابراین $\mathrm{span}(K) = aff(K) = K$. همچنین چون K غیر بدیهی است، بردار ناصفرِ $k \in K$ وجود دارد. چون $\mathrm{span}(K) = K$، پس $-k \in \mathrm{span}(K) = K$ و این با نوکدار بودنِ K در تناقض است. به این ترتیب $\circ \notin icr(K)$.

قضیه ۱۵. ([۴]) اگر A زیرمجموعه‌ای تقریباً محدب از X باشد، آن‌گاه $icr(A)$ محدب است.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم

$$\forall(a \in \mathrm{icr}(A) \ \ , \ \ b \in A) \ \ , \ \ [a, b] \subseteq A.$$

داریم

$$a \in \mathrm{icr}(A) \subseteq A \ \ , \ \ b \in A \ \Rightarrow \ b - a \in L(A).$$

از طرفی، $a \in icr(A)$ و بنابراین

$$\exists \lambda' > \circ \ \ ; \ \ a + \lambda(b - a) \in A \ \ , \ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

لذا

$$[a, a + \lambda'(b - a)\,] = [\,a\,, \lambda' b + \,(۱ - \lambda')a\,] = [a, r] \subseteq A$$

که در آن، $r = \lambda' b + (۱ - \lambda')a$. فرض می‌کنیم $\circ < \lambda' < ۱$ (زیرا در غیر این صورت $[a, b] \subseteq A$ و ادعا اثبات می‌شود). ثابت می‌کنیم $(r, b) \subseteq A$. بدین منظور، $m = \lambda_۱ r + (۱ - \lambda_۱)b \in (r, b)$ را که $\lambda_۱ \in (\circ, ۱)$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$m = \lambda_۱(a + \lambda'(b - a)) + (۱ - \lambda_۱)b = \lambda_۱(۱ - \lambda')a + (۱ - \lambda_۱(۱ - \lambda'))b.$$

چون $\lambda_۲ \in (\circ, ۱)$ وجود دارد به‌طوری که $m = \lambda_۲ a + (۱ - \lambda_۲)b$ (در واقع، m روی پاره‌خط واصلِ a و b نیز قرار دارد)، پس

$$\lambda_۱(۱ - \lambda')a + (۱ - \lambda_۱(۱ - \lambda'))b = \lambda_۲ a + (۱ - \lambda_۲)b = m.$$

در نتیجه $\lambda_2 = \lambda_1(1 - \lambda')$ و بنابراین $\lambda_1 > \lambda_2$. اگر مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی α را که A، α ـ محدب است با Θ نمایش دهیم، می‌توان نشان داد Θ در $[0, 1]$ چگال است ([٦]). لذا

$$\exists \lambda_3 \in \Theta \cap [\lambda_2, \lambda_1].$$

بردار e را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e = b + (\frac{\lambda_2}{\lambda_3})(a - b) = (\frac{\lambda_2}{\lambda_3})a + (1 - (\frac{\lambda_2}{\lambda_3}))b.$$

داریم $e \in [a, r]$، زیرا $\lambda_1 \leq \lambda_3$. پس $\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = (1 - \lambda')$. لذا با توجه به تعریفِ $[a, r]$ داریم

$$e \in [a, r] \subseteq A.$$

در نتیجه از این که A، λ_3 ـ محدب است به‌دست می‌آوریم

$$m = b + \lambda_2(a - b) = b + \lambda_3(e - b) = \lambda_3 e + (1 - \lambda_3)b \in A.$$

پس به‌طور خلاصه، تا اینجا ثابت کرده‌ایم

$$(a \in icr(A) \ \ , \ \ b \in A) \ \Rightarrow \ [a, b] \subseteq A.$$

حال اگر فرض کنیم $a, b \in icr(A)$ و $\lambda \in (0, 1)$، آن‌گاه

$$\forall x \in L(A) \ \ , \ \ \exists \mu' > 0 \ \ ; \ \ a + \mu x \in A \ \ , \ \ \forall \mu \in [0, \mu'].$$

بنابر قسمت قبل،

$$\lambda b + (1 - \lambda)(a + \mu x) \in A \ \ , \ \ \forall \mu \in [0, \mu'].$$

بنابراین $\lambda b + (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)\mu x \in A$ که $(1 - \lambda)\mu < (1 - \lambda)\mu' = \beta'$ > 0. در نتیجه

$$\lambda b + (1 - \lambda)a + \beta x \in A, \forall \beta \in [0, \beta'] \Rightarrow \lambda b + (1 - \lambda)a \in icr(A).$$

بنابراین $icr(A)$ محدب است.

با اثباتی مشابه اثبات لم ١٢، می‌توان نتیجه گرفت $\mathrm{icr}(K - M) = \mathrm{icr}(K) - \mathrm{icr}(M)$. به‌علاوه، می‌توان نشان داد لم‌های ١٢ و ١٣ و قضیهٔ ١۵ برای cor نیز برقرارند. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند خواص و کاربردهای بیشتر درون جبری (نسبی) را در مراجع [١]، [٢]، [٣]، [۴] و [٩] مطالعه نماید.

٣. کاربرد در بهینه‌سازی

در ادامه، به کاربردهایی از درون جبری و درون جبری نسبی در بهینه‌سازی برداری می‌پردازیم. بدین منظور، ابتدا بستار برداری را تعریف می‌کنیم که جایگزین بستار توپولوژیکی در فضاهای توپولوژیک است.

تعریف ١٦. ([٣]) اگر A یک زیرمجموعهٔ ناتهی از X باشد، بستار برداری[١] A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$vcl(A)=\{b\in X \;:\; \exists x\in X \;;\; \forall\lambda' > \circ \;,\; \exists\lambda\in\left(\circ,\lambda'\right] \;,\; b+\lambda x\in A\}.$$

A را بسته برداری می‌نامیم هرگاه $A=vcl(A)$. خواص بیشتر بستار برداری را می‌توان در [١]، [٢]، [٣] و [۴] یافت.

تعریف ١٧. ([٣]) دوگان جبری[٢] X که با X' نشان می‌دهیم مجموعهٔ همهٔ توابع خطی از X به $\mathbb{R}$ است. برای زیرمجموعه‌ای دلخواه از X مانند A، دوگان مثبت A را با A^+ و دوگان اکیداً مثبت A را با A^{+s} نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^{+}=\{l\in X' \;:\; \langle l,a\rangle\geq\circ \;,\; \forall a\in A\},$$
$$A^{+s}=\{l\in X' \;:\; \langle l,a\rangle>\circ \;,\; \forall a\in A\backslash\{\circ\}\}$$

که در آن، $\langle l,a\rangle=l(a)$.

اکنون مسائل بهینه‌سازی برداری نامقید را معرفی و سپس تعاریف کارایی، کارایی ضعیف[٣]، کارایی سره برداری هورویسز[۴] ، و کارایی سره برداری بنسون[۵] را بیان می‌کنیم. X و Y فضاهای برداری هستند که Y با مخروط K مرتب شده است. مسألهٔ بهینه‌سازی برداری نامقید زیر را در نظر بگیرید:

$$K-\min\{f(x)\;:x\in E\} \qquad (٣)$$

که $E\subset X$ یک زیر مجموعهٔ ناتهی است و $f:E\longrightarrow Y$.

تعریف ١٨. [٣] نقطهٔ $x_\circ\in E$ را جواب کارا نسبت به K برای مسأله (٣) می‌نامیم اگر

$$\nexists\, x\in E\backslash\{x_\circ\} \qquad f(x_\circ)\in f(x)+K.$$

تعریف ١٩. [۴] با فرض $icr(K)\neq\emptyset$، بردار $x_\circ\in E$ را جواب کارای ضعیف نسبت به K برای مسأله (٣) گوییم هرگاه

$$\nexists\, x\in E\backslash\{x_\circ\} \qquad f(x_\circ)\in f(x)+icr(K).$$

اکنون یک شرط لازم و کافی به منظور تشخیص نقاط کارای ضعیف بیان مینماییم. اثبات این قضیه را می‌توان در [۴] یافت.

1) Vector closure 2) Algebraic dual 3) Weak efficiency 4) Hurwicz vectorial proper efficiency 5) Benson vectorial proper efficiency

قضیه ۲۰. فرض کنید $\mathrm{icr}(K) \neq \emptyset$، $L(K) \neq K$ و $x_{\circ} \in E$.

(i) فرض کنید $\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(A) + K)$ محدب باشد و $\mathrm{icr}(\mathrm{vcl}(K)) \neq \emptyset$. مجموعهٔ

$$A = cone(f(E) - f(x_{\circ})) + icr(K)$$

را در نظر بگیرید. اگر $L(A) \subseteq L(K)$ یا $\mathrm{vcl}(A) = A$ و $x_{\circ}$ جواب کارای ضعیف برای مسأله (۳) باشد، آن‌گاه $l \in K^{+}\backslash\{\circ\}$ وجود دارد که روی $icr(K) \cup (f(E) - f(x_{\circ}))$ صفر نیست و $x_{\circ}$ جواب بهینه مسأله اسکالر $\min\{\langle lof, x\rangle \ : \ x \in E\}$ است.

(ii) اگر $l \in K^{+}\backslash\{\circ\}$ وجود داشته باشد که روی $\mathrm{icr}(K)$ صفر نباشد و $x_{\circ}$ یک جواب بهینه برای مسألهٔ اسکالر $\min\{\langle lof, x\rangle \ : \ x \in E\}$ باشد، آن‌گاه $x_{\circ}$ جواب کارای ضعیف مسأله (۳) است.

تعریف ۲۱. ([۳]) $x_{\circ} \in E$ را جواب کارای سره برداری هورویسز (HuV) نسبت به K برای مسأله (۳) گوییم هرگاه

$$vcl(conv(cone((f(\Omega) - f(x_{\circ})) \cup K))) \cap (-K) = \{\circ\}.$$

$x_{\circ} \in E$ را جواب کارای سره برداری بنسون (BeV) نامیم هرگاه

$$vcl(conv(cone(f(\Omega) - f(x_{\circ}) + K))) \cap (-K) = \{\circ\}$$

در ادامه، نقاط کارای سره برداری را به‌کمک اسکالرسازی مشخص می‌کنیم. معمولاً برای اثبات شرایط لازم، از محدب بودن تابع هدف استفاده می‌شود. در اینجا، از مفهوم شبه‌محدب برداری تعمیم‌یافته استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۲۲. ([۳]) نگاشت $f : E \to Y$ در E نسبت به K، شبه‌محدب برداری تعمیم‌یافته (Gvcl)[1] است هرگاه $vcl(cone(f(E)) + K)$ محدب باشد.

تعریف ۲۳. ([۳]) اگر $icr(K) \neq \emptyset$ و یک تابعک خطی $l \in K^{+s}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x_{\circ} \in E$ جواب بهینه مسألهٔ اسکالر $\min\{\langle lof, x\rangle \ : \ x \in E\}$ باشد، آن‌گاه $x_{\circ}$، HuV است.

برهان. با استفاده از فرض بهینگی $x_{\circ}$ و با توجه به این که $l \in K^{+s}$، داریم

$$\langle l, b\rangle \geq \circ \quad , \quad \forall b \in (f(E) - f(x_{\circ})) \cup K.$$

بردارهای $b_{\backslash}, b_{\Upsilon} \in (f(E) - f(x_{\circ})) \cup K$ و اعداد $\alpha \geq \circ$ و $\lambda \in [\circ, \backslash]$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\alpha(\lambda b_{\backslash} + (\backslash - \lambda)b_{\Upsilon}) \in cone(conv((f(E) - f(x_{\circ})) \cup K)).$$

---

1) Generalized vector convexlike

از این‌رو

$$\langle l, \alpha(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)\rangle = \alpha\lambda\langle l, b_1\rangle + \alpha(1-\lambda)\langle l, b_2\rangle \geq 0.$$

بنابراین $l \in (cone(conv((f(E)-f(x_0)) \cup K)))^+$. با استفاده از گزاره ۲.۲ در [۳]،

$$l \in (vcl(cone(conv((f(E)-f(x_0)) \cup K))))^+.$$

به‌علاوه با توجه به این‌که $l \in K^{+s}$ داریم

$$\langle l, -k\rangle < 0, \quad \forall k \in K\backslash\{0\}.$$

همچنین $0 \in vcl(cone(conv((f(E)-f(x_0)) \cup K)))$. بنابراین

$$vcl(cone(conv((f(E)-f(x_0)) \cup K))) \cap (-K) = \{0\}.$$

در نتیجه x_0، HuV است.

قضیه ۲۴. ([۳]) فرض کنید K غیر بدیهی، نوکدار و بستهٔ برداری باشد و $cor(K^+) \neq \emptyset$. به‌علاوه، $x_0 \in \Omega$ و نگاشت $f(.) - f(x_0)$ در E نسبت به K، $Gvcl$ است. اگر x_0، HuV باشد، آن‌گاه تابعک خطی $l \in K^{+s}$ وجود دارد به‌طوری که x_0 جواب بهینه مسألهٔ اسکالر $\min\{\langle lof, x\rangle : x \in E\}$ است.

برهان. با توجه به گزاره ۱.۳ در [۳]، x_0، BeV است. بنابراین

$$vcl(cone(f(E)-f(x_0)+K)) \cap (-K) = \{0\}.$$

در نتیجه

$$vcl(cone(f(E)-f(x_0))+K) \cap (-K) = \{0\}.$$

چون تابع $f(.) - f(x_0)$ نسبت به K، Gvcl است، لذا $vcl(cone(f(E)-f(x_0))+K)$ محدب و بستهٔ برداری است. اکنون با استفاده از قضیهٔ ۲.۲ در [۳] داریم

$$\exists l \in X' \;\; ; \;\; \langle l, f(x)-f(x_0)+k\rangle \geq 0 \;\; , \;\; \forall (x \in E \,, \, k \in K)$$

و

$$\langle l, k\rangle > 0 \;\; , \;\; \forall k \in K\backslash\{0\}.$$

پس $l \in K^{+s}$. اگر $k = 0$، آن‌گاه

$$\langle lof, x\rangle \geq \langle lof, x_0\rangle \;\; , \;\; \forall x \in E.$$

پس x_0 جواب بهینه مسألهٔ اسکالر است.

مراجع

[1] M. Adan, V. Novo, "Efficient and weak efficient points in vector optimization with generalized cone convexity", *Applied Mathematics Letters*, **16** (2003), 221-225.

[2] M. Adan, V. Novo, "Partial and generalized subconvexity in vector optimization problems", *Journal of Convex Analysis*, **8** (2001), 583-594.

[3] M. Adan, V. Novo, "Proper efficiency in vector optimization on real linear spaces", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **121** (2004), 515-540.

[4] M. Adan, V. Novo, "Weak efficiency in vector optimization using a closure of algebraic type under cone- convexlikeness", *European Journal of Operational Research*, **149** (2003), 641-653.

[5] V. Barbu, Th. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, Springer-Verlag, 1975.

[6] M. S. Bazaraa, C. M. Shetty, *Foundations of optimization*, Lectures Notes in Economic and Mathematical systems, Springer-verlag, Germany, 1976.

[7] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, John Wiley and Sons, New York, 1993.

[8] E. R. Cstnek, *Overcoming the failure of the classical generalized interior-point regularity conditions in convex optimization*, PhD thesis, Technischen Universitat Chemnitz, 2009.

[9] J. Jahn, *Vector optimization: theory, applications, and extensions*, Second edition, Springer-Verlag, 2011.

[10] E. Hernandez, B. Jimenez, V. Novo, "Weak and proper efficiency in set-valued optimization on real linear spaces", *Jornal of Convex Analysis*, **14** (2007), 275-296.

[11] R. B. Holmes, *Geometric functional analysis and its applications*, Springer-Varlag, New York, 1975.

[12] Y. D. Hu, Z. Q. Meng, *Convex analysis and nonsmooth analysis*, Shanghai scientical and technical press, Shanghai, 2000.

[13] S. Khoshkhabar-amiranloo, *On the functions with pseudoconvex sublevel sets and nonsmooth optimization*, Master dissertation in Applied Mathematics, University of Tehran, October 2010 (In persian).

[14] E. Kiyani, *Cones and efficiency in vector optimization*, Master dissertation in Applied Mathematics, University of Tehran, October 2011 (In persian).

[15] W. Rudin, *Functional analysis*, Second edition, McGraw-Hill, New York, 1991.

[16] S. Z. Shi, *Convex analysis*, Shanghai scientical and technical press, Shanghai, 1990.

[17] Z. A. Zhou, X. M. Yang, J. W. Peng, *Optimization conditions of set-valued optimization problems involving relative algebraic interior in ordered linear spaces*, `www.optimization-online.org`.

الهام کیانی kiyani-e@ut.ac.ir

مجید سلیمانی دامنه soleimani@khayam.ut.ac.ir

دانشگاه تهران ، پردیس علوم، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر