فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۳۳ تا ۴۲

# معماری رویه‌های دو بعدی در $\mathbb{R}^3$ و اثباتی شهودی برای قضیهٔ گاوس ـ بونه

علیرضا بحرینی

**چکیده**

در این مقاله، اثباتی شهودی و در عین‌حال به‌اندازهٔ کافی دقیق از قضیهٔ کلاسیک گاوس ـ بونه ارائه می‌کنیم. این اثبات کاملاً طبیعی است و در آن از زبان هندسهٔ ذاتی و مفاهیمی چون مشتق هموِرد و ضرایب کریستوفل و حتی مفهوم ژئودزیک استفاده نمی‌شود. تاکنون مقالات بیشماری دربارهٔ این قضیه به رشتهٔ تحریر در آمده است و احتمال وجود اثری مشابه یادداشت حاضر در گوشه‌ای از این مجموعهٔ گسترده غیرممکن به‌نظر نمی‌رسد.

## ۱. مقدمه

مطالعهٔ خواص هندسی رویه‌های دو بعدی موضوع درس هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی در دورهٔ کارشناسی ریاضی به‌حساب می‌آید. علیرغم ظاهر مجرد، کاربردهای فراوان و البته مقدماتی از محتوای این درس در شاخه‌های مختلف علوم وجود دارد که غالباً به‌دلیل فشردگی مطالب و کمیِ وقت، فرصتی برای طرح آن‌ها دست نمی‌دهد. به‌طور طبیعی شناخت معماری رویه‌های دو بعدی در هر جایی با آن‌ها سروکار پیدا می‌کنیم، ضروری به نظر می‌رسد. چگونگی انعکاس نور از سطح یک آیینهٔ خمیده، رابطهٔ کشش سطحی سیالات با شکل هندسی سطح آن‌ها، مطالعهٔ خواص کشسانی پوسته‌ها و ... همگی وابسته به داشتن شناختی جامع از هندسهٔ رویه‌ها هستند. یکی از بنیادی‌ترین مفاهیم درس یعنی انحنای گاوسی مورد توجه و علاقهٔ فیزیک‌دانان است، زیرا در صورت‌بندی نسبیت عام، نوع تعمیم یافتهٔ آن موسوم به انحنای ریچی ارتباط تنگاتنگی با ماده و انرژی دارد. مفهوم انحنا یکی از بنیادی‌ترین و عمیق‌ترین مفاهیم در هندسه است. همان‌طور که از

نام گاوس به‌عنوان مبدع آن می‌توان حدس زد، چیزی نزدیک به دو قرن از تولد این مفهوم در دنیای ریاضیات می‌گذرد ولی هنوز هم رسیدن به درک کاملی از آن حتی برای متخصصین چندان ساده به نظر نمی‌رسد. شاید قضیه گاوس ـ بونه را بتوان شاهدی بر این مدعا دانست. چراکه که از یک سو با حدگیری از آن می‌توان به درکی جدید و ساده از مفهوم انحنا رسید از سوی دیگر، اثبات مرسومِ آن بسیار طولانی، محاسباتی و غیرشهودی است تا آنجا که مطالعهٔ این اثبات‌ها به تنهایی چندان گرهی از رازهای پشت پرده نمی‌گشاید. نوشتهٔ حاضر را می‌توان تلاشی برای دست یافتن به درکی عمیق‌تر از قضیهٔ گاوس ـ بونه به‌حساب آورد. ابتدا یادداشت هیلبرت در کتاب هندسه و تجسم ([1]) دربارهٔ انحنای گاوسی و ذاتی بودن آن را مرور می‌کنیم و سپس به ارائهٔ اثباتی طبیعی و شهودی از قضیهٔ گاوس ـ بونه می‌پردازیم. در این مسیر، نکاتی ساده که معمولاً در کتب استاندارد هندسهٔ دیفرانسیل به آن پرداخته نمی‌شود، مطرح خواهیم نمود از جمله: انگیزه‌ای طبیعی برای تعریف نگاشت گاوس، دلیل نامگذاری «انحنای ژئودزیکی» و همچنین خاصیتی جالب از خم‌های انحنا و خم‌های مجانبی و رابطهٔ آن‌ها با نگاشت گاوس.

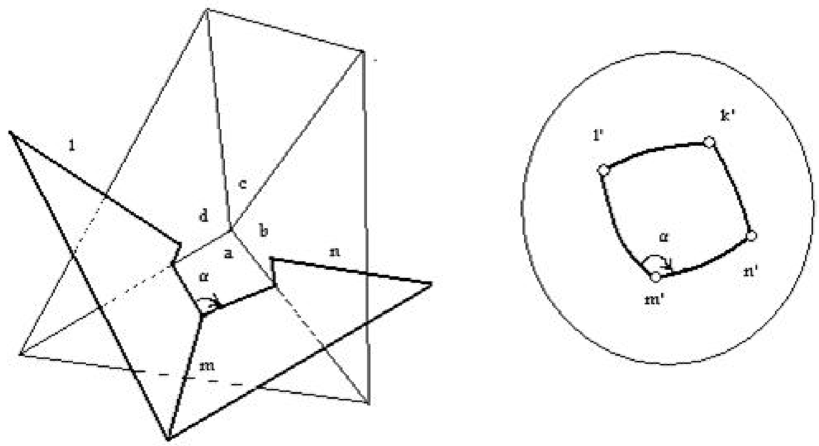
## ۲. نگرش هیلبرت به انحنای گاوسی

اگر $S$ یک رویهٔ هموار (و همبند) دلخواه و $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ کرهٔ واحد دو بعدی در $\mathbb{R}^3$ باشد، نگاشت گاوس نگاشتی است مانند $N : S \to S^2$ که به هر نقطهٔ $p \in S$ بردار واحد عمود بر رویه در آن نقطه را نسبت می‌دهد. بنابر تعریف،انحنای گاوسی رویهٔ $S$ در نقطهٔ $p$ برابر است با $\kappa(p) = \det \mathrm{dN(p)}$. جلوتر در این یادداشت سعی خواهیم کرد به برخی انگیزه‌های این تعریف اشاره کنیم. انحنای گاوسی دارای خاصیت فوق‌العاده مهمِ ناوردا ماندن نسبت به خم کردن رویه است. در اینجا مقصود از خم کردن رویه، هر تغییری در شکلِ رویه نیست بلکه تغییراتی است که تحت آن‌ها طول خم‌ها و زوایای بین خم‌های ترسیم شده روی رویه پایا باشند. می‌توان مفهوم خم کردن را با کمک رویه‌های کاغذی یا تشکیل شده از هر ماده‌ای که تقریباً غیرقابل کشیدن باشد تا حدی نشان داد. ناوردا بودن نسبت به خمش، باعث ایجاد رابطه‌ای نزدیک بین انحنای گاوسی و آن خواصی از رویه می‌شود که فقط به زوایا و طول خم‌های روی آن بستگی دارند. به همین دلیل است که انحنای گاوسی و تعمیم‌های مرتبهٔ بالاتر آن، اهمیت بنیادی در نظریهٔ نسبیت پیدا می‌کند.

از آنجا که تعریف اولیهٔ انحنای گاوسی به وضعیت نسبی رویه در فضا بستگی دارد، این حقیقت که این کمیت نسبت به خمش ناوردا می‌ماند باعث شگفتی و امری غیربدیهی است. استدلال زیر راهنمایی بر درست بودن این واقعیت است. یادآوری می‌کنیم که یکی از راه‌های مرسومِ اثبات این مطلب، استفاده از قضیهٔ گاوس ـ بونه است.

فرض کنید چند صفحهٔ مثلثی صلب به گونه‌ای در فضا در کنار یکدیگر قرار گرفته باشند که هر دو صفحهٔ همسایه بتوانند نسبت به یکدیگر حول یال مشترکشان بچرخند. شکل زیر نمونه‌ای با چهار

مثلث $a$، $b$، $c$ و $d$ را نشان می‌دهد. در صورتی که بیش از سه وجه وجود داشته باشد، کنج سه‌بعدی متشکل از مثلث‌ها امکان تغییر شکل در فضا را خواهد داشت. تمام این تغییرات، طول‌ها و زوایای همهٔ خم‌های رسم‌شده روی سطح کنج را ثابت نگه می‌دارند و بنابراین می‌توان آن‌ها را «خمش» در نظر گرفت. با ترسیم بردارهای $(l, m, n, \ldots)$ عمود بر وجوه کنج و با انتخاب جهت برون‌گرا در هر حالت، تصویری کروی از کنج متشکل از نقاط منفرد $(l', m', n', \ldots)$ به‌دست می‌آوریم که دقیقاً همان تصویر نگاشت گاوس است. به منظور ایجاد ارتباط بین این کنج و نمایش کروی، نقاطی را که وجوه همسایه در کنج را نشان می‌دهند با دوایر عظیمه به یکدیگر وصل می‌کنیم تا یک چندضلعی روی کره به‌دست آید.




شکل ۱

خواهیم دید که مساحت این چندضلعی کروی تحت «خم‌کردن» چنان‌که در بالا تعریف شد، ثابت می‌ماند، حقیقتی که به‌طور بدیهی شبیه ناوردایی انحنای گاوس تحت خم‌کردن رویه است. اثبات ادعای ما بر مبنای قضایای مقدماتی مثلثات کروی است. همان‌طور که در بخش بعدی نیز اشاره خواهد شد، این یک قضیهٔ مشهور است که مساحت یک مثلث کروی و مشابهاً مساحت هر چندضلعی که اضلاع آن متشکل از دوایر عظیمه باشد، فقط به مجموع زوایای آن بستگی دارد. در نتیجه تنها چیزی که باید نشان دهیم، این است که زوایای چندضلعی کروی که نمایش‌دهندهٔ کنج است، تحت خم‌کردن کنج به معنی فوق، ناوردا هستند. اما همان گونه که شکل ۱ نشان می‌دهد، روشن است که هر یک از این زوایا مکمل یک زاویهٔ بین دو ضلع همسایه در کنج است و بنا به فرض ما این زوایا نمی‌توانند تغییر کنند.

بحث فوق را می‌توان با یک فرآیند حدگیری تکمیل نمود تا از آن، ناوردایی انحنای گاوسی در مورد رویه‌های محدب حاصل شود. در حین گذر به حد باید رویه را به‌وسیلهٔ چندوجهی‌های محاط با وجوه مثلثی کوچک تخمین بزنیم و سپس استدلال فوق را برای هر رأس چندوجهی تکرار کنیم.

## ۳. اثباتی شهودی از قضیه گاوس ــ بونه

یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های هندسه‌دانان قرن نوزدهم را می‌توان چالش دربارهٔ نقش اصل توازی و نتایج مرتبط با آن در هندسه‌های نااقلیدسی دانست. گاوس، لباچفسکی، بویویی و ریمان را به‌طور سنتی از بنیانگذاران هندسه‌های نااقلیدسی به‌شمار می‌آورند. در هندسه‌های نااقلیدسی، اصل پنجم (اصل توازی) با یکی از ناقض‌های آن جایگزین می‌شود: «از یک نقطه خارج یک خط، یا هیچ و یا بیش از یک خط موازی آن عبور می‌کند.» کارل فریدریش گاوس ظاهراً اولین فردی بوده است که به این نتیجه رسیده که هیچ تناقضی در این اصول جدید نهفته نیست. وی در یک نامهٔ خصوصی در سال ۱۸۲۴ می‌نویسد:

> «این فرض که (در یک مثلث) مجموع زوایا کمتر یا بیشتر از ۱۸۰ درجه باشد منجر به هندسه‌های عجیبی می‌گردد کاملاً متفاوت اما سازگار با هندسه‌های ما که من آن را با رضایت کامل گسترانده‌ام.»

ما نقطهٔ آغازین حرکت خود را برای گذر به قضیهٔ گاوس ــ بونه یادآوری همین قضیهٔ مشهور دبیرستانی قرار می‌دهیم. سپس دو نوع تعمیم از این قضیه را مطرح می‌کنیم که ترکیب آن‌ها به قضیهٔ گاوس ــ بونه منجر خواهد شد.

**قضیه ۱.** جمع زوایای هر مثلث در صفحه برابر ۱۸۰ درجه است.

**روش اول برای تعمیم قضیهٔ ۱.** یک مسیر برای تعمیم قضیهٔ فوق، گذر به هندسه‌های کروی و هذلولوی است. پس از صفحهٔ دو بعدی، یکی از طبیعی‌ترین رویه‌ها که مطالعهٔ آن‌ها به دلایل مختلف مورد توجه دانشمندان مسلمان نیز بوده، کرهٔ دو بعدی $S(r,a)$ است که در آن، $r \in \mathbb{R}$ شعاع و $a \in \mathbb{R}^3$ مرکز کره را نشان می دهند. اگر مبدأ مختصات را به مرکز کره منتقل کنیم و شعاع کره را واحد بگیریم، می‌توان نوشت:

$$S^2 := S(1,0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

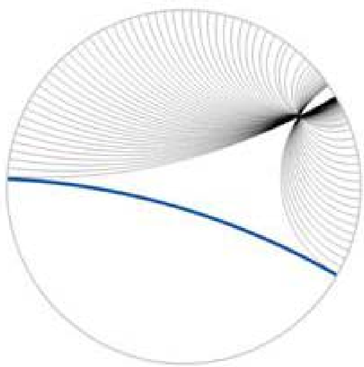
در هندسهٔ کروی دایره‌های عظیمه موسوم به ژئودزیک، نقش خطوط راست صفحهٔ اقلیدسی را بازی می‌کنند و به‌سادگی می‌توان دید که این خم‌ها به‌طور موضعی کوتاهترین مسیر بین نقاط روی کره هستند گرچه این خاصیت به‌طور سرتاسری برقرار نیست. تعمیمی از قضیهٔ ۱ در هندسهٔ کروی به شرح زیر است:

**قضیه ۲.** اگر $\triangle ABC$ یک مثلث با زوایای $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ و مساحت $S$ باشد، آن‌گاه

$$\alpha+\beta+\gamma-2\pi = S.$$

توجه کنید که در هندسهٔ کروی از یک نقطه خارج یک خط هرگز نمی‌توان خطی موازی آن رسم کرد؛ همچنین اصل بینیت هم نقض می‌شود. هندسهٔ هذلولوی دارای توصیف به‌مراتب دشوارتری

است که در آن، اصل توازی اقلیدس همان‌طور که در شکل ۲ دیده می‌شود، به شکل دیگری نقض می‌شود. به عبارت دیگر، از هر نقطه خارج یک خط بینهایت خط غیرمتقاطع با آن رسم می‌شود. مدل‌های مختلفی برای توصیف این هندسه وجود دارد. یک قرص باز به شعاع واحد در نظر بگیرید. خطوط یا ژئودزیک‌های هندسه عبارت‌اند از تمام دوایر عمود بر مرز این قرص همراه با قطرهای آن.



**شکل ۲**

همچنین فواصل در داخل قرص به گونه‌ای تغییر می‌کنند که مرز قرص در فاصلهٔ بینهایت دور قرار می‌گیرد. قضیه‌ای مشابه با قضایای ۱ و ۲ در این مدل نیز برقرار است.

**قضیه ۳.** اگر $\triangle ABC$ یک مثلث با زوایای $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ و مساحت $S$ باشد، آن‌گاه

$$۲\pi - \alpha - \beta - \gamma = S.$$

**روش دوم برای تعمیم قضیهٔ ۱.** برای رسیدن به مسیر دیگری برای تعمیم قضیهٔ ۱، کافی است مثلث را حالت خاص خم‌های قطعه‌ای هموار تصور کنیم. در این صورت تعبیری شهودی از قضیهٔ ۱ این است که بردار مماس بر این خم، پس از یک بار چرخش به دور آن، به اندازهٔ ۳۶۰ درجه یا $۲\pi$ رادیان می‌چرخد. بدین ترتیب قضیهٔ زیر را نیز می‌توان تعمیمی از قضیهٔ ۱ دانست.

**قضیه ۴.** برای هر خم هموار سادهٔ بستهٔ $\Gamma : [\circ, l] \to \mathbb{R}^۲$ که برحسب طول پرمایش شده است داریم

$$\int_\circ^l \kappa(s)\mathrm{d}s = ۲\pi.$$

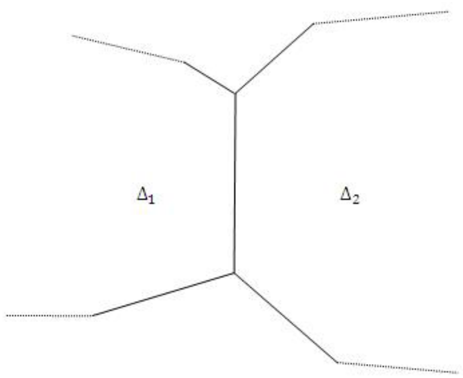
در اینجا، کمیت $\kappa(s)$ موسوم به انحنای خم، میزان چرخش بردار مماس بر خم در واحد طول را بیان می‌کند و طبیعتاً انتظار می‌رود مقدار انتگرال سمت چپ، چرخش کل این بردار پس از یک بار طی کردن خم را محاسبه کند و از آنجا مقدار سمت راست یعنی $۲\pi$ قابل پیش‌بینی خواهد بود. برای سادگی در بیان صورت این قضیه، فرض کرده‌ایم در هیچ نقطه‌ای شکستگی رخ نمی‌دهد؛ در غیر این صورت جمع زوایای خارجی در نقاط شکستگی را نیز باید به سمت چپ تساوی فوق اضافه کرد. در اثبات‌های مرسوم این قضیه، از ابزارهای توپولوژی جبری استفاده می‌شود ولی ما به اثباتی

شهودی و به‌ظاهر ساده بسنده می‌کنیم که پر کردن شکاف‌های آن به‌کمک قضایایی از توپولوژی هندسی امکان‌پذیر است.

در حقیقت برای ارائهٔ یک اثبات شهودی می‌توان به طرق مختلفی عمل کرد: یک راه آن است که ابتدا قضیه را برای یک چندضلعی اثبات و سپس خم قطعه‌ای هموار دلخواه را با چندضلعی تقریب بزنیم. روش دیگر که برای تعمیم‌های مورد نظر ما مفیدتر است، استفاده از یک مثلث‌بندی (تقریبی) درون خم مفروض است. مثلث‌بندی مورد نظر را طوری می‌گیریم که مرز آن، تخمین خوبی از خم ژردان داده شده باشد. حال کافی است به این نکته توجه کنیم که اگر $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ دو چندضلعی باشند که به طرز مناسبی کنار هم قرار گرفته‌اند و برای هر یک از آن‌ها رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$(\text{جمع زوایای خارجی } \Delta_i) - ۲\pi = ۰, \quad i = ۱,۲$$

آن‌گاه برای $\Delta = \Delta_۱ \cup \Delta_۲$ نیز رابطهٔ مشابهی برقرار خواهد بود.




**شکل ۳**

با تکرار این استدلال می‌توان قضیهٔ زیر را نیز اثبات نمود.

**قضیه ۵.** اگر $\Gamma_۱$، $\Gamma_۲$، ... ، $\Gamma_n$ خم‌هایی قطعه‌ای هموار در صفحه باشند که دو به‌دو بیرون یکدیگر و همگی در درون $\Gamma$ قرار گرفته‌اند و $\Omega$ ناحیهٔ کراندار محصور به این خم‌ها باشد، آن‌گاه

$$\oint_{\partial\Omega} \kappa \mathrm{d}s - ۲\pi = -۲n\pi.$$

به عبارت دیگر، انتگرال انحنای مرز چنین ناحیه‌ای کمیتی است که فقط با توپولوژی ناحیه مورد نظر ارتباط دارد.

حال تلاش می‌کنیم قضیهٔ مشابهی را در هندسه کروی بیان و به روشی مشابه اثبات نمائیم. ابتدا توجه می‌کنیم که «خطوط راست» روی کره همان دایره‌های عظیمه هستند. لذا اگر بخواهیم انحنای

یک خم روی کره را تعریف کنیم باید میزان چرخش دایرهٔ عظیمهٔ مماس بر خم مورد نظر در واحد طول را در هر نقطه اندازه بگیریم. این همان چیزی است که در هندسهٔ دیفرانسیل انحنای ژئودزیکی یک خم روی یک رویه نامیده و با $\kappa_g$ نمایش داده می‌شود. تعبیری معادل و مشهورتر از انحنای ژئودزیکی یک خم روی یک رویه در یک نقطه، عبارت است از انحنای (مسطح) تصویر خم بر صفحهٔ مماس بر رویه در آن نقطه. حال اگر یک خم سادهٔ بسته و قطعه‌ای هموار روی کره واحد داشته باشیم و $\Omega$، یکی از ناحیه‌های محدود به خم، را به‌کمک مثلث‌های ژئودزیکی مثلث‌بندی کنیم به گونه‌ای که مرز مثلث‌بندی تخمین مناسبی از خم مورد نظر باشد، آن‌گاه با تکرار استدلال فوق و استفاده از قضیهٔ ۲، نتیجهٔ زیر حاصل می‌گردد.

**قضیه ٦.**

$$\oint_{\partial\Omega} \kappa_g \mathrm{d}s - ۲\pi = S_\Omega$$

که در آن، $S_\Omega$ مساحت ناحیهٔ $\Omega$ را نشان می‌دهد.

گذر به یک رویهٔ دلخواه $S$ و ارائهٔ یک قضیهٔ مشابه روی آن با دشواری‌هایی همراه است. اولین ایده‌ای که ممکن است به ذهن برسد این است که رویهٔ مورد نظر را در نقاط مختلف با کره‌هایی درآن نقاط تخمین بزنیم و با کمک قضیهٔ فوق و ارائهٔ تعریفی معادل برای انحنای گاوسی به یک صورت‌بندی از قضیهٔ گاوس ـ بونه دست یابیم. باید به این نکته توجه کرد که تخمین مرتبهٔ دوم یک رویه در یک نقطه الزاماً کره از آب در نمی‌آید و به این خاطر و به دلایلی که در ادامه روشن خواهد شد، به سرانجام رساندن این ایده غیرممکن به‌نظر می‌رسد.

روش دیگری که ما در اینجا دنبال خواهیم کرد، استفاده از نگاشت گاوس $N : S \to S^۲$ است که به هر نقطه از رویه بردار واحد نرمال در «آن» نقطه از رویه را نسبت می‌دهد. به‌منظور ارائهٔ انگیزه‌ای برای تعریف این نگاشت، کافی است به نگاشت مشابهی در یک بعد پایین‌تر توجه کنیم. یک خم هموار مسطح را در نظر بگیرید. اگر یک موجود دو بعدی در راستای عمود بر این خم مسطح بایستد و با سرعت ثابتی شروع به حرکت کند، سر این فرد زاویه‌ای را روی دایرهٔ واحد جاروب می‌کند و نرخ تغییرات این زاویه در واحد طول برابر انحنای خم خواهد بود. حال به یک بعد بالاتر می‌رویم و یک انسان سه‌بعدی را تصور می‌کنیم که روی یک رویهٔ دو بعدی هموار ایستاده است. پس از نرمال‌سازی، می‌توان تصور کرد که وقتی فرد ناحیه‌ای را روی رویه جاروب می‌کند، تصویر سر او روی کرهٔ واحد نیز یک ناحیه را می‌پیماید که مساحت این ناحیه بنابر تعریف، زاویهٔ فضایی کنجی است که از کنار هم نهادن بردارهای نرمال در هر نقطه از ناحیهٔ مذکور حاصل می‌شود. بدین ترتیب، نرخ تغییرات این زاویه در واحد سطح، می‌تواند به‌عنوان معیاری برای «انحنای» رویه در آن نقطه در نظر گرفته شود و این همان «انحنای گاوسی» رویه، $\kappa$، در آن نقطه است.

حال تلاش می‌کنیم با کمک نگاشت گاوس تعمیمی از قضیهٔ ٦ به‌دست آوریم. ابتدا ناحیه‌ای مانند $\Omega_۱$ همسانریخت با یک قرص روی رویه در نظر بگیرید که به یک خم ژردان (قطعه‌ای)

هموار $\gamma_1$ محدود شده است. برای سادگی، فرض کنید تحدید نگاشت گاوس به این ناحیه نیز یک وابرریختی باشد و قرار می‌دهیم $\Omega_2 = N(\Omega_1)$ و $\gamma_2 = N(\gamma_1)$. بنابر تعریف نگاشت گاوس، داریم

$$\text{مساحت}\,\Omega_2 = \int_{\Omega_1} \kappa dS.$$

از سوی دیگر، بر اساس قضیهٔ ٦، مقدار مساحت $\Omega_2$ را می‌توان با انتگرال انحنای ژئودزیکی خم مرزی $\gamma_1$ محاسبه کرد. از این‌رو سؤالی که ممکن است به ذهن برسد این است که آیا می‌توان کمیتی مانند $\kappa_{\gamma_1}$ به هر نقطه از خم $\gamma_1$ طوری نسبت داد که رابطه‌ای مانند زیر برقرار باشد:

$$\int_{\Omega_1} \kappa \mathrm{d}S = \oint_{\gamma_1} \kappa_{\gamma_1} \mathrm{d}s - 2\pi.$$

یک انتخاب طبیعی برای این مقدار، انحنای ژئودزیکی خم $\gamma_2$ است. از این‌رو باید از خود بپرسیم چه رابطه‌ای بین انحنای ژئودزیکی خم $\gamma_1$ در نقطهٔ $p$ و انحنای ژئودزیکی $\gamma_2$ در نقطهٔ $N(p)$ وجود دارد. با توجه به مطالب فوق، شاید اولین حدسی که به ذهن برسد این باشد:

$$\kappa_{1g}(p) = d(p)\kappa_{2g}(N(p)) \qquad (*)$$

که در آن، مقصود از $k_{ig}(q)$ انحنای ژئودزیکی خم $\gamma_i, i = 1, 2$ در نقطهٔ $q$ است و $d(q)$ میزان انبساط واحد طول خم $\Omega_1$ در نقطهٔ $q$ توسط نگاشت گاوس را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر، ممکن است حدس زده شود که نگاشت گاوس، انحنای ژئودزیکی خم‌ها را متناسب با عکس میزان انبساط طول آن‌ها تغییر می‌دهد. اگر چنین رابطه‌ای برقرار باشد، به‌ویژه قضیهٔ گاوس ــ بونه فوراً حاصل خواهد شد چراکه خواهیم داشت

$$\int_{\gamma_1} \kappa_{1g} \mathrm{d}s_1 = \int_{\gamma_2} \kappa_{2g} \mathrm{d}s_2. \qquad (**)$$

متأسفانه رابطهٔ $(*)$ درست نیست ولی چنان‌که خواهیم دید، می‌توان رابطهٔ دقیقی برای توصیف چگونگی تغییرات انحنای ژئودزیکی تحت نگاشت گاوس به‌دست آورد که منجر به $(**)$ گشته و از آن، اثباتی برای قضیهٔ گاوس ــ بونه حاصل می‌شود. برای این منظور، فرض کنید $\gamma_1 : I \to S$ یک خم هموار پرمایش شده به‌وسیلهٔ طول، روی رویه $S$ باشد و قرار دهید $\gamma_2 = N o \gamma_1$، $t(s) := \dot{\gamma}_1(s)$ و $n_T(s) := t(s) \times N(s)$. روشن است که $t(s)$ و $n_T(s)$ در هر نقطه یک پایهٔ یکامتعامد برای فضای مماس بر رویه در آن نقطه تشکیل می‌دهند. بدین ترتیب می‌توان نوشت

$$\frac{D\gamma_2}{ds} = at(s) + bn_T(s) \qquad (1)$$

که در آن، مقصود از $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{ds}}$ مشتق هموردا نسبت به رویهٔ $S$ است. همچنین $a$ و $b$ توابعی از $s$ هستند که می‌توان مقدار دقیق آن‌ها را نیز به‌دست آورد و ما در اینجا نیازی به به این کار نداریم. بنابر تعریف

انحنای ژئودزیکی برای خم $\gamma_1$، می‌دانیم که $\frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{ds}} = \kappa_{1g} n_T(s)$ و از این رابطه به‌سادگی می‌توان به تساوی $\frac{\mathrm{Dn_T(s)}}{\mathrm{ds}} = -\kappa_{1g} t(s)$ رسید.

از (۱) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{D^2\gamma_2}{ds^2} = a't + b'n_T + \kappa_{1g}(an_T - bt). \qquad (۲)$$

باید توجه کرد که در اینجا پارامتر $s$ طول خم $\gamma_2$ نیست و لذا برای محاسبهٔ انحنای ژئودزیکی $k_{2_g}$ برای خم $\gamma_2$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\kappa_{2g} = \pm 1/ \mid \frac{D\gamma_2}{ds} \mid^3 \big(\frac{D\gamma_2}{ds} \times \frac{D^2\gamma_2}{ds^2}\big).N.$$

در اینجا علامت + یا − به جهت انتخابی روی رویه و جهت پیمایش خم $\gamma_2$ بستگی دارد. از روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{D\gamma_2}{ds} \times \frac{D^2\gamma_2}{ds^2} = \big((ab' - a'b) + \kappa_{1g}(a^2 + b^2)\big)N$$

و همچنین

$$\mid \frac{D\gamma_2}{ds} \mid = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

که از آن به‌دست می‌آوریم

$$\kappa_{2g} = \frac{ab' - a'b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{\kappa_{1g}}{(a^2 + b^2)^{1/2}}.$$

از مقایسهٔ این رابطه با حدس اولیهٔ (*) دیده می‌شود که این حدس چندان نیز نادرست نبوده است چراکه جملهٔ دوم سمت راست در بالا در حقیقت همان (*) است که حدس زده بودیم ولی این مقدار نیاز به «تصحیحی» دارد که توسط جملهٔ $\frac{ab'-a'b}{(a^2+b^2)^{3/2}}$ توصیف می‌گردد.

اگر در این جمله از ضریبی به‌صورت $1/(a^2 + b^2)^{1/2}$ که بر اثر تغییر عنصر طول ایجاد شده صرف‌نظر کنیم، برای قسمت باقی مانده می‌توان نوشت

$$\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} = (-\arctan(\frac{b}{a}))'.$$

اما دربارهٔ این جمله چه می‌توان گفت؟ ابتدا توجه می‌کنیم که $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$ در واقع زاویهٔ بین $\gamma_1'(s)$ و $\gamma_2'(s)$ است. در حالتی که این زاویه همه‌جا ثابت باشد، حدس اولیه (*) برقرار است و تغییرات این زاویه می‌تواند موجب بر هم خوردن (*) شود.

اگر $\gamma$ یک خم اصلی یا یک خم مجانبی باشد، انحنای ژئودزیکی $\alpha$ تنها ضریبی از انحنای ژئودزیکی $\gamma$ خواهد بود و این ضریب، همان نسبت انبساط طول توسط نگاشت گاوس است. در این دو حالت داریم $\pi/2$ یا $\theta = 0$.

مطلب کلی‌تری که می‌توان بیان کرد این است که اگر به‌طور موضعی نقشه‌ای روی رویه داشته باشیم که خم‌های مختصاتی آن بر خم‌های انحنای رویه منطبق باشند، آن‌گاه خم‌هایی که انحنای ژئودزیکی آن‌ها به تعبیر رابطهٔ $(*)$ حفظ می‌شود دقیقاً عبارت‌اند از خم‌هایی که دارای زاویهٔ ثابتی نسبت به خم‌های مختصاتی هستند. بدین ترتیب می‌توان معادلهٔ دیفرانسیل آن‌ها را نوشت و به‌طور کامل مورد مطالعه قرار داد.

۱) اگر $\gamma$ یک خم اصلی یا یک خم مجانبی باشد، انحنای ژئودزیکی $\alpha$ تنها ضریبی از انحنای ژئودزیکی $\gamma$ خواهد بود و این ضریب همان نسبت انبساط طول توسط نگاشت گاوس است. در این دو حالت $\theta = \circ$ یا $\pi/۲$.

۲) مطلب کلی‌تری که می توان بیان کرد آن است که اگر به طور موضعی نقشه‌ای روی رویه داشته باشیم که خم‌های مختصاتی آن بر خم‌های انحنای رویه منطبق باشند آنگاه خم‌هایی که انحنای ژئودزیکی آنها به تعبیر رابطه $(*)$ حفظ می‌شود دقیقاً عبارتند از خم‌هایی که دارای زاویه ثابتی نسبت به خم‌های مختصاتی هستند. بدین ترتیب می‌توان معادله دیفرانسیل آنها را نوشت و به طور کامل آنها را مورد مطالعه قرار داد.

تکمیل قضیهٔ گاوس ـ بونه بر اساس مشاهدات فوق، آسان است. تنها مطلبی که ممکن است باعث ایجاد مشکل شود این است که گرچه جملهٔ اول در سمت راست عبارت $(*)$ مشتق کامل به نظر می‌رسد، اما در عبارتی که از آن مشتق گرفته شده متغیر $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$ ظاهر می‌شود که تنها در حد مضرب صحیحی از $۲\pi$ خوش‌تعریف است. به عبارت دیگر، پس از انتگرال‌گیری روی $s$، ممکن است مطابق معمول، مضرب صحیحی از $۲\pi$ نیز در طرف راست ظاهر شود که مطلوب ما نیست.

نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که بنا بر فرض اولیه، ناحیهٔ $\Omega_۱$ همسانریخت با یک قرص و در نتیجه همبند ساده است. از این‌رو می‌توان خم مرزی $\gamma_۱$ را به‌طور پیوسته در ناحیهٔ $\gamma_۱$ منقبض کرد تا به یک نقطه تبدیل شود. در طی این تغییرات پیوسته، ضریب صحیح $۲\pi$ که در بالا ذکر شد باید ثابت باقی بماند و این مقدار ثابت به‌دلیل فرآیند حدگیری چیزی جز صفر نمی‌تواند باشد. گذر از نواحی همبند ساده به نواحی کلی‌تر با یک فرآیند مثلث‌بندی بر اساس روش استاندارد قابل انجام است. بدین ترتیب اثبات قضیهٔ گاوس ـ بونه تکمیل می‌شود.

## مراجع

[1] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., *Geometry and the Imagination*, AMS Chelsea Pub., 1999.

---

علیرضا بحرینی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

bahraini@sharif.edu