فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۵ تا ۱۵

آزمایش ذهنی فرایلینگ

احسان ممتحن

(آیا عقل عرفی و فرض پیوستار با یکدیگر سر ناسازگاری دارند؟)

چکیده

هدف این مقاله، معرفی و شرح آزمایش ذهنی کریستوفر فرایلینگ در رد فرض پیوستار کانتور و نتایج فلسفی آن به زبانی ساده و تا حد امکان غیر فنّی[1] است.

۱. مقدمه

در ستایش افلاطون مشربی سخن‌های بسیار خوانده‌ایم و شنیدیم و گفته‌اند؛ از جمله این‌که در افلاطون‌گرایی راه بر روش‌های جدید پژوهش گشوده‌تر است و ذهن جستجوگر می‌تواند در هواهای تازه‌تری نفس زند. مگر ریاضی‌دانان ضمانت داده‌اند تا ابدالاباد در اسارت اثبات‌های سنتی یعنی همان اثبات‌های متشکل از کلمات و نمادها باقی بمانند؟ آیا باید آن همه اثبات‌های تصویری کوتاه و زیبا را بگذاریم و بگذریم به این بهانه که شکل‌ها دقیق نیستند؟ مگر اثبات‌ها، در تحلیل نهایی، جز نشانه‌هایی بر سر راه هستند؟ جز انگشت اشاره‌ای که جایی را نشانه رفته است: آنک قُلّه، آنک کعبه[2]. همین که تو و من نیز بتوانیم قله را ببینیم، اثبات وظیفه‌اش را به انجام رسانده است ([۴]). پیش از این، در [۷]، دیدیم که چطور پارادایم (= الگوی تبیینی، دیدمان) ریاضی در حال تغییر است و بورباکی‌گرایی آهسته آهسته جایش را به بینشی تجربی‌تر از ریاضیات می‌دهد.

---

۱) جیمز رابرت براون در [۲] فصلی کامل (فصل یازده) را به آزمایش ذهنی فرایلینگ اختصاص داده است. فصل مذکور یکی از جالب‌ترین بخش‌های کتاب وی است. مقالهٔ حاضر، کم و بیش چکیده و ساده‌شدهٔ فصل یازده کتاب مذکور است.

۲) اشاره به خوابی است که ناصر خسرو قبادیانی، پیر یُمگان، دید که کسی به سوی کعبه اشارت همی‌کرد. وی در آن زمان ۴۰ ساله بود. از خواب بیدار شدن همان و آغاز تحول همان.

انتشار مجله‌ای وزین با عنوان *ریاضیات تجربی*[1] خود نشانه‌ای روشن بر آغاز این تغییر پارادایم تواند بود. اگر همهٔ این مقدمات، پذیرفتنی باشند، آزمایش‌های ذهنی که تاکنون میدان تاخت و تاز نبوغ فیزیک‌دانانی چون اینشتین[۲] و شرودینگر[۳] بوده است اکنون می‌تواند جولانگاه ریاضیدانان باشد. یکی از طبع آزمایی‌ها در این عرصه، آزمایش ذهنی کریستوفر فرایلینگ در ردّ فرض پیوستار است.

پرسشی که فوراً به ذهن می‌آید این است که مگر گودل و کوهن ثابت نکردند که فرض پیوستار مستقل از مابقی اصول موضوعهٔ (= بُنداشت‌های) نظریهٔ مجموعه‌هاست؟ پس ردّ فرض پیوستار به چه معنی است؟ استقلال فرض پیوستار مطلبی است کاملاً جا افتاده اما اگر افلاطون‌گرا باشی و واقع گرا، اگر به وجود اشیاء ریاضی مستقل از ما باور داشته باشی و بالاخره اگر هر گزارهٔ ریاضی را بیان امری واقع در عالم مُثُل بدانی، آن‌وقت باور خواهی کرد که هر گزارهٔ ریاضی یا درست است یا غلط و لذا دارای ارزشی است. به هر حال، یا سیب از درخت می‌افتد یا نمی‌افتد و کسی هم نمی‌پرسد منظورت در کدام چارچوب یا با پذیرش کدام اصل فیزیکی است. واقع‌گرایان، به همین سان در ریاضیات برای هر گزاره‌ای ارزشی قایل‌اند. از این منظر، آیا فرض پیوستار درست است؟ کریستوفر فرایلینگ می‌گوید نه، نیست و دلیل وی آزمایشی ذهنی است که نشان می‌دهد پذیرش فرض پیوستار با شهود، عقل عرفی[4] و به‌طور دقیق‌تر با این نکته که پدیده‌ای که علی‌الاصول نباید اتفاق بیافتد در صورت پذیرش فرض پیوستار، هر دَمْ اتفاق می‌افتد در تخالف است.

۲. مقدمات کار

همهٔ ما دیده‌ایم که عدد اصلی $P(X)$، مجموعه توانی X، با عدد اصلی 2^X، مجموعهٔ تمام توابع از X به $\{0, 1\}$، برابر است. معمولاً پس از بیان این مطلب، قضیه‌ای معروف از کانتور را می‌خوانیم که عدد اصلی $P(X)$، یعنی $|P(X)|$ از $|X|$ اکیداً بزرگتر است. اکنون اگر بیاد بیاوریم که $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$، این نتیجه به‌دست می‌آید: $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < c = |\mathbb{R}|$. پس تا اینجای کار می‌دانیم که c اکیداً بزرگتر از $\aleph_0$ است. مشکل از آنجا آغاز می‌شود که بخواهیم بدانیم که c چقدر بزرگتر از $\aleph_0$ است؟

قضیهٔ کانتور وجود سلسله مراتبی از مجموعه‌هایی با عدد اصلی نامتناهی را به اثبات می‌رساند: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \cdots$. پرسش جالبی که وی با آن رویارو شد، به جایگاه عدد اصلی $\mathbb{R}$، پیوستار، در سلسله مراتب $0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots$ مربوط بود. آیا $2^{\aleph_0} = \aleph_1$؟ یا با $\aleph_2$ مساوی است؟ یا شاید هم با $\aleph_3$؟ فرض پیوستار کانتور، CH، مدعی

1) Experimental Mathematics

۲) اینشتین تعداد زیادی آزمایش ذهنی ابداع کرده که از آن جمله می‌توان از آزمایش ای. پی. آر نام برد.

۳) گربهٔ شرودینگر

4) Common sense

است که $|\mathbb{R}| = \aleph_1$؛ معادلاً $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. اگر CH نادرست باشد، آن‌گاه ممکن است $|\mathbb{R}|$ با $\aleph_2$ مساوی باشد، یا با $\aleph_{1392}$، یا شاید هم به‌ازای هر n متناهی، از هر $\aleph_n$ بزرگتر باشد. هرچند فرض پیوستار معمولاً در چارچوب اعداد اصلی ترامتناهی بیان می‌گردد، این مفاهیم برای بیان آن ضروری نیستند. در واقع، فرض پیوستار در آنالیز استاندارد به‌سادگی قابل بیان است: هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از اعداد حقیقی یا با مجموعهٔ اعداد طبیعی در تناظر یک‌به‌یک است یا با مجموعهٔ اعداد حقیقی ([۸]).

اوایل سدهٔ بیستم تلاش‌های ناکامِ بسیاری برای ابطال یا اثبات فرض پیوستار صورت گرفت. نخستین پیشرفت چشمگیر، زمانی رخ داد که کورت گودل در سال ۱۹۳۸ ثابت کرد که فرض پیوستار با بقیهٔ اصول نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است. وی این مهم را با فراهم آوردن الگویی مبتنی بر به‌اصطلاح «مجموعه‌های ساخت‌پذیر» به‌اجرا در آورد که در آن، همهٔ بنداشتهای ZFC (نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ــ فرانکل به‌همراهِ اصل انتخاب) صادق بودند و فرض پیوستار نیز صادق بود. این، البته به آن معنی است که CH نمی‌تواند به شیوه‌ای عادی (استنتاج $\sim CH$ از بقیهٔ بنداشت‌های ZFC) ابطال گردد.

پال کوهِن استقلال کامل را در سال ۱۹۶۳ اثبات کرد. او ابزار نیرومند نوینی با نام تَحمیل[1] معرفی کرد که به وی امکان داد الگویی از نظریهٔ مجموعه‌ها بسازد که در آن، ZFC صادق اما CH کاذب بود. نتایج گودل و کوهن بر روی هم، تصمیم‌ناپذیری فرض پیوستار را اثبات می‌کنند. CH مستقل از ZFC است: نه می‌تواند اثبات شود نه ابطال ــ دست‌کم نه به شیوه‌های متداول.

در اینجا با مسألهٔ فلسفی جذّابی روبه‌رو می‌شویم. در ریاضیات رایج، قایل به پیوندی ناگسستنی میان *صدق و اثبات* هستیم. دو اردوگاه فلسفی، صورت‌گرایان و ساخت‌گرایان، این نکته را تصریح کرده‌اند، هر چند انگیزهٔ آنان در این راه، متفاوت بوده است. چون ساخت‌گرایان با بخش اعظم مجموعه‌های نامتناهی کانتور میانهٔ خوبی ندارند، این مکتب را کنار می‌گذاریم. از طرف دیگر، صورت‌گرایان با کمال میل، نظریهٔ مجموعه‌های کانتور را می‌پذیرند. آن‌ها نوعاً این دیدگاه را که CH صاحب ارزشی نیست اختیار می‌کنند، زیرا استقلالِ آن اثبات شده است ــ فرض پیوستار نه صادق است و نه کاذب. دلیل بنیادی این تلقی این است که ریاضیات را پیکره‌ای مبتنی بر بنداشت‌ها می‌پندارند که آن‌ها را به دلایل گوناگونی پذیرفته‌ایم اما داشتن صدق عینی، از جملهٔ این دلایل نیست. گفتن این‌که گزارهٔ P صادق است با این سخن یکی است که: P می‌تواند منطقاً از بنداشت‌های پذیرفته‌شده استنتاج شود؛ و گفتن این‌که P کاذب است مساوی است با گفتن این‌که $\sim P$ می‌تواند از بنداشت‌های مذکور استنتاج شود. هیچ‌کدام از این دو شِق برای CH ممکن نیست، پس فرض پیوستار، نزد ریاضی‌دانِ صورت‌گرا، صاحب هیچ ارزشی نیست.

بر خلافِ صورت‌گرایان، افلاطون‌گرایان مدعی‌اند که صدق، سوا از اثبات است. اثباتی برای P،

1) Forcing

P را به گزاره‌ای صادق تبدیل نمی‌کند بلکه تنها در حکم قرینه‌ای (= شاهدی، گواهی) بر صدق P است. عدم استنتاج از اصول اولیه بدان معنی است که ممکن است برای همیشه از ارزش P بی‌اطلاع بمانیم اما P همچنان صاحب ارزش خواهد بود. احساس افلاطون‌گرا همانند احساس اکثر ما در باب گزاره‌های علوم طبیعی است. ممکن است قرینه‌ای بر این که ۴ میلیون سال قبل، در محل کنونیِ انجمن ریاضی ایران واقع در پارک ورشو، نبردی هولناک میان یک ماموت و یک ببر دندان‌خنجری رخ داده است، در دست نداشته باشیم. با وجود این، اکثر ما بر این باوریم که این ادعا یا صادق است یا کاذب. امکان ابطال یا اثبات یک ادعا، هیچ ربطی به صدق یا کذبش ندارد. گرایش افلاطون‌گرایانه نسبت به CH نیز وضعی همانند دارد. فرض پیوستار، واقعاً صادق یا واقعاً کاذب است حتی اگر نتوانیم هیچ‌کدام را اثبات کنیم.

علاوه بر ملاحظات کلیِ نشأت گرفته از افلاطون‌گرایی، دلایل دیگری برای این‌که فکر کنیم CH صاحب ارزش معینی است وجود دارد؛ دلایلی که از ملاحظات موجود در نظریهٔ مجموعه‌ها الهام گرفته شده‌اند. در اینجا (برای آنان که با نظریهٔ مجموعه‌ها قدری آشنایی دارند ــ بقیه می‌توانند آن را نادیده بگیرند) دلیل جالبی وجود دارد حتی اگر با اقبال همگانی روبه‌رو نشود. تصور کنید مشغول مطالعهٔ اعداد ترتیبی (= اوردینال‌ها) هستید. هر بار که از اوردینالی چون β به اوردینال بعدی می‌روید، عددی حقیقی مثل r گزینش کنید و با آن اردینال متناظرش سازید و بنویسید r_β. چون مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، صرفاً یک مجموعه است ولی اوردینال‌ها، Ord، یک کلاس محض است، قطعاً پیش از آن‌که اوردینال‌ها به پایان برسند، به انتهای اعداد حقیقی می‌رسیم[1]. بنابراین برای اوردینالی چون α، $\{r_\beta \ : \ \beta \in \alpha\}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را در بر می‌گیرد. حال چنین به نظر می‌رسد که $|\mathbb{R}|$ کوچکترین αیی است که می‌تواند به‌صورت $\{r_\beta \ : \ \beta \in \alpha\}$ فهرست شود. این یعنی α عددی اصلی مانند a است و لذا می‌توانیم نتیجه بگیریم که پیوستار، عددی اصلی مانند $\aleph_a$ دارد. البته اگر $a = ۱$، آن‌گاه CH صادق است و اگر $a \neq ۱$، آن‌گاه CH کاذب است. اما یکی از این دو باید اتفاق بیافتد، پس فرض پیوستار قطعاً صاحب ارزش است.

حال که اثبات در نزد افلاطون‌گرایان نوعی قرینه، شاهد و گواه به‌حساب می‌آید، انواع دیگر قرینه و شاهد نیز به همان اندازهٔ اثبات، خواستنی و مطلوب‌اند. به عبارت دیگر، چون اثبات، محکی برای صدق نیست بلکه صرفاً گونه‌ای گواهی برای صدق فراهم می‌آورد، رغبتی طبیعی برای معرفی انواع دیگری از استدلال‌های موجّه وجود دارد. از هر چه بگذریم، خود بنداشت‌ها قابل استنتاج نیستند بلکه باید آن‌ها را به دلایل دیگری صادق پنداشت. برخی فیلسوفان ریاضی، گرایش افلاطونیِ بی‌تعصبی برگزیده‌اند که بر طبق آن، ریاضیات را همانند علوم طبیعی می‌دانند([۲] فصل یازدهم).

۱) کلاس‌های محض عضو دارند درست به همان صورت که مجموعه‌ها عضو دارند اما آن‌ها خودشان عضوی از مجموعه‌ای بزرگتر نیستند. «خیلی بزرگتر از آن‌اند» که مجموعه انگاشته شوند. همهٔ اعداد ترتیبی یک مجموعه تشکیل نمی‌دهند چراکه فرضِ وجود چنین مجموعه‌ای، به پارادوکس منجر می‌شود. اما بی هیچ مشکلی می‌توان از کلاس همهٔ اعداد ترتیبی سخن گفت.

همان گونه که برخی از مهمترین اختراعات نظیر میکروسکوپ، آغازگر روش‌های جدیدی برای تولید قرائن تازه است، آزمایشی ذهنی که متضمن پرتاب تیر است، ممکن است دست‌کم در بنیاد، قرینه‌ای برای صدق یا کذب CH فراهم کند.

۳. ردّیهٔ فرایلینگ بر CH

در این بخش از مقاله، به توضیح مطالب ریاضی و فنّی‌ای خواهیم پرداخت که بعداً در اثبات فرایلینگ نقشی مهم ایفا خواهند کرد. سعی شده است که این مطالب به زبانی تا حدّ ممکن غیرفنی شرح داده شوند.

۱.۳. ZFC و خوش‌ترتیبی

ما ZFC و نتیجهٔ مهم آن، یعنی «اصل خوش‌ترتیبی» را مسلّم فرض خواهیم کرد. این اصل می‌گوید که هر مجموعه می‌تواند خوش‌ترتیب شود، یعنی چنان مرتب شود که هر زیر مجموعهٔ ناتهیِ آن، عضو ابتدا داشته باشد. ترتیب معمولی، $<$، روی مجموعهٔ اعداد طبیعی نیز یک خوش‌ترتیبی برای اعداد طبیعی است. مجموعه‌ای را برگزینید، مثلاً $\{۸۲, ۳۶, ۴۷, ۶۳۹۷۲\}$. این مجموعه عضو ابتدا دارد: ۳۶. اما بر خلافِ اعداد طبیعی، ترتیب معمولی روی اعداد حقیقی، $<$، یک خوش‌ترتیبی نیست. به‌عنوان مثال، مجموعهٔ $\{x : ۰ < x < ۱\} = (۰, ۱)$ عضو ابتدا ندارد. با وجود این، اصل خوش‌ترتیبی تضمین می‌کند که اعداد حقیقی می‌توانند با رابطه‌ای چون $<'$، خوش‌ترتیب شوند هرچند هیچ‌کس تاکنون چنین رابطه‌ای را نیافته است.

۲.۳. تیرها، نقاط، اعداد حقیقی

آزمایش ذهنی فرایلینگ متضمن پرتاب به یک خط به‌منظور انتخاب اعداد حقیقی است. فرض‌های مهمی در این آزمایش لحاظ شده‌اند. یکی از آن‌ها این است که خطی شامل نقاط از قبل موجود می‌باشد. به‌عکس، ارسطو، می‌اندیشید که نقاط، مثلاً با پرتاب تیر می‌توانند ساخته شوند اما پیش از این وجود نداشته‌اند. اگر حق با جناب ارسطو باشد، در آن صورت، آزمایش فرایلینگ به‌طور قطع، کارآیی‌اش را از دست می‌دهد. پس فرضِ از پیش موجود بودنِ نقاط، فرضی اساسی است. امروزه به یُمن هندسهٔ تحلیلی دکارت، این فرض‌ها و هر چیزی که بر آن‌ها استوار گردد را آسانتر می‌پذیریم.

به‌علاوه، ایده‌آل‌سازی‌های متعددی صورت می‌گیرد. به‌طور قطع، هیچ خط مادی‌ای پیوسته نیست. جهان و محتملاً خودِ فضا، از جهات گوناگون، گسسته است. پس این نوعی خط ایده‌آل‌شده است که به آن تیر می‌افکنیم. همچنین هیچ‌کس باور ندارد که می‌توانیم عدد حقیقی مشخصی را با محل اصابت تیر یکی بگیریم. این نیز ایده‌آل‌سازی است. همهٔ این‌ها نشان می‌دهند که آزمایش

فرایلینگ، آزمایشی ذهنی است.

۳.۳. آزمایش ذهنی

اکنون نوبت به بخش تجسمی دیداری آزمایش ذهنی می‌رسد. تصور کنید که به خط حقیقی یا دقیق‌تر بگوییم به بازهٔ [۱ ,۰] تیر پرتاب می‌کنیم. دو تیر پرتاب می‌شود و آن دو از یکدیگر مستقل هستند. هدف، انتخاب دو عدد تصادفیِ p و q است. اگر از آن بیم دارید که تیرها اگر یکی پس از دیگری افکنده شوند، ممکن است از یکدیگر مستقل نباشند، دو تیرانداز را تصور کنید که همدیگر را نمی‌بینند و هر دو پس از شمارش «یک، دو، سه، پرتاب» تیرشان را به‌سوی خط رها می‌کنند؛ یا از هم جدایشان کنید و از آن‌ها بخواهید که تیرشان را به نسخه‌های متفاوتی از [۱ ,۰] بیفکنند.

در این آزمایش ذهنی، سه نکتهٔ مهم وجود دارند که باید به آن‌ها توجه کرد: زوجی از اعداد حقیقی به‌طور تصادفی، مستقل از یکدیگر و به نحوی متقارن انتخاب می‌شوند. بگذارید قدری این مفاهیم را بررسی کنیم.

۴.۳. متغیرهای تصادفی، استقلال و تقارن

تعاریف ریاضی متعارف از متغیرهای تصادفی چیزی از این دست هستند: یک *متغیر تصادفی* تابعی اندازه‌پذیر از یک فضای احتمال به یک فضای اندازه است. ذکر یک مثال به فهم این مطلب کمک خواهد کرد. تصور کنید دو تاس را پرتاب می‌کنیم. می‌توانیم به پرتاب‌ها عدد نسبت دهیم: پرتاب ۱، پرتاب ۲، پرتاب ۳ و غیره. نتیجهٔ یک پرتاب که مجموع عددهای ظاهر شده روی تاس‌ها است، عددی بین ۲ و ۱۲ است. می‌توانیم هر پرتاب را یک آزمایش و عددی که روی تاس نمودار می‌شود را نتیجهٔ آن بینگاریم. متغیر تصادفی تابعی است چون X با دامنهٔ {پرتاب ۱، پرتاب ۲، پرتاب ۳، ...} و برد {۱۲ ,۲,۳,⋯}. پرتاب یک تیر متغیری تصادفی با نتیجه‌هایی در [۱ ,۰] است. آن طور که دیوید مامفرد ([6]) می‌گوید، این‌ها «متغیرهای تصادفی حقیقی» هستند.

دو عدد حقیقی، به‌طور مستقل انتخاب می‌شوند چراکه دو تیر اثری بر یکدیگر ندارند. در واقع، پیش‌بینی متکی بر یکی از پرتاب‌ها بر پیش‌بینی دربارهٔ پرتاب دوم هیچ اثری ندارد. ذکر مثالی در این باب خالی از فایده نیست. پیش‌بینی کسی که دربارهٔ نمرهٔ یک خودرو در حال عبور می‌گوید: «شگفتا، شانس اتفاق چنین چیزی یک در میلیون است» را در نظر آورید. می‌توانیم این پیش‌بینی را نادیده و در شگفت‌ماندنِ آن شخص را بی‌مورد بدانیم، زیرا تنها هنگامی حقِ حیرت کردن داریم که نصبِ نمرهٔ خودرو مستقل از نتیجهٔ به‌دست آمده باشد، حال آن‌که در همان زمانِ نصب نمره هم معلوم بوده است که این نمره، نمرهٔ خاصّی است (مثلاً فرض کنید نمرهٔ کذایی شمارهٔ شناسنامه و سال تولدتان را نشان دهد). مستقل بودن و تصادفی بودن تیرها، تقارن پرتاب‌ها را تضمین می‌کند. در نتیجه، هر یک از دو تیر را می‌توان نخستین تیری انگاشت که مجموعه‌ای از اعداد حقیقی را که از قبل خوش‌ترتیب شده است، معین می‌کند. به قول فرایلینگ «خط حقیقی واقعاً نمی‌داند که کدام

تیر، اول و کدام یک بعداً پرتاب شده است» ([۳]).

۵.۳ اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و پاره‌های آغازین

در استدلالی که در پی می‌آید از نکتهٔ مهمی در نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم. اعداد ترتیبی (= اوردینال‌ها) مرتب هستند (در واقع، خوش ترتیب‌اند):

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \omega < \omega+1 < \omega+2 < \cdots < \omega 2 < \omega 2+1 < \cdots$$
$$< \omega 3 < \cdots < \omega^2 < \cdots < \omega^\omega < \cdots < \epsilon_0 < \cdots.$$

اعداد ترتیبی این ویژگی بسیار مهم را دارند که هر دوتای آن‌ها یا با هم یکریخت هستند یا یکی با پارهٔ آغازین دیگری یکریخت است. *پاره‌ای آغازین* از یک مجموعهٔ مرتب صرفاً یک زیرمجموعهٔ سرهٔ آن است. اگر S پارهٔ آغازینِ مجموعهٔ خوش‌ترتیب W باشد، آن‌گاه $a \in W$ وجود دارد که $S = \{x \ : \ x < a\}$. بنابراین عدد $\{0, 1, 2\} = 3$ پارهٔ آغازین عدد ترتیبی ۴ است (و همچنین پارهٔ آغازین ۵، ٦ و ۷، ...). برای هر عدد طبیعی n، مجموعهٔ $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$، پاره‌ای آغازین از ω (مجموعهٔ اعداد طبیعی) است. یک قضیهٔ مهم می‌گوید: هیچ مجموعهٔ خوش‌ترتیبی با پاره‌های آغازین خود یکریخت نیست.

اعداد اصلی به‌کمک اعداد ترتیبی تعریف می‌شوند. در حالت متناهی، آن‌ها به‌وضوح یکی هستند. بنابراین عدد ترتیبی ۲۷ همان عدد اصلی ۲۷ است. در حالت نامتناهی، امور قدری دشوارتر می‌شوند. اعداد ترتیبی متمایز بسیاری وجود دارند که میان آن‌ها توابع یک‌به‌یک و پوشا (و نه ترتیبْ نگه‌دار) وجود دارد و به این معنی، بزرگی یکسانی دارند. به‌عنوان مثال، $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \ldots, \omega 3, \omega 3+1, \ldots, \omega^2, \omega^2+1, \ldots$ همگی می‌توانند در تناظری یک‌به‌یک با یکدیگر قرار گیرند. یک *عدد اصلی* کوچکترین عضو مجموعهٔ همهٔ اوردینال‌های یکریخت است. بنابراین $\aleph_0$ را با ω یکی می‌گیریم.

بر این تعریف نتیجه‌ای مترتب است که ممکن است آن را تاکنون دریافته باشید. چون هر پارهٔ آغازینِ یک عدد ترتیبی از خودِ عدد ترتیبی کوچکتر است و چون یک عدد اصلی با کوچکترین عدد ترتیبیِ یکریخت با خودش یکی گرفته می‌شود، پس نتیجه می‌شود که عدد اصلی پارهٔ آغازین باید از عدد اصلی مجموعهٔ اولیه‌مان کوچکتر باشد. در چند حالت، این نکته کاملاً مشهود است. اگر با مجموعهٔ ω آغاز کنیم و پارهٔ آغازینی از آن را برگزینیم، در آن صورت، مجموعه‌ای با تنها تعدادی متناهی عضو برگزیده‌ایم. این موضوع در این مثال بدیهی بود اما در حالت کلی هم صادق است. در نتیجه، اگر با مجموعه‌ای با عدد اصلی $\aleph_1$ آغاز کنیم و پاره‌ای آغازین از آن را برداریم، عدد اصلی این پارهٔ آغازین شمارا خواهد بود، یعنی یا $\aleph_0$ یا متناهی. ما از این نکته در استدلال پایانی بهره خواهیم جست.

۶.۳. اندازه و احتمال

مفهوم احتمال را در حالتی که فضای نمونه‌ای متناهی است، بیان کردیم. مفهوم احتمال در حالت نامتناهی قدری فنّی‌تر است. اگر یک جفت تاس را پرتاب کنیم، ۳۶ نتیجهٔ ممکن وجود دارد. با نمایش این نتایج به‌صورت زوج مرتب (تاس اول، تاس دوم)، به‌اصطلاح فضای نمونه‌ای $\{(1,1),(1,2),(2,1),\cdots,(6,6)\}$ را با ۳۶ نتیجهٔ متفاوت در اختیار خواهیم داشت. با فرض آن‌که این دو، تاس‌های سالمی باشند، احتمال رخداد همهٔ نتایج یکسان است. احتمال به‌دست آوردن مجموع ۲ عبارت است از $\frac{1}{36}$، زیرا تنها به یک طریق ممکن است چنین اتفاقی رخ دهد، یعنی وقتی که برآمد آزمایش، $(1,1)$ باشد. به سه طریق ممکن است نتیجهٔ ۴ را به‌دست آورد، یعنی $(1,3)$، $(3,1)$ و $(2,2)$. بنابراین احتمال به‌دست آوردنِ مجموع ۴، عبارت است از $\frac{1}{12} = \frac{3}{36}$. احتمال به‌دست آوردن یک عدد زوج، یکْ دومْ، به‌دست آوردنِ عددی بین ۲ و ۱۲، یک و به‌دست آوردن نتیجهٔ ۱۳، صفر است. همگی این‌ها کاملاً سرراست است اما در حالت نامتناهی امور، به این سادگی نیستند.

تیری به پاره‌خط $[0,1]$ پرتاب کنید. ممکن است تیر را به $\frac{1}{5}$، $\frac{2}{\pi}$، یا $\frac{e}{3}$ یا نقاط دیگر بزنید. اما شانس برخورد تیر به هر یک از این نقاط چقدر است؟ شانس، یکی در نامتناهی است که به معنی احتمالِ صفر است. با شگفتی، رویدادهایی با شانس صفر واقعاً رخ می‌دهند. این موضوع هرچند عجیب است اما غیرمنطقی نیست. ممکن است بپنداریم که معنابخشی به حالت نامتناهی، آبْ در هاون کوبیدن است اما چنین نیست. شاخه‌ای از آنالیز به‌نام نظریهٔ اندازه به فریادمان می‌رسد.

نظریهٔ اندازه، یا با بیانی دقیق‌تر، نظریهٔ اندازهٔ لبگ، راهی پیش پای ما می‌نهد تا به تعداد بی‌شماری مجموعه‌های متفاوت، اندازه نسبت دهیم. اندازهٔ مجموعه‌ای از نقاط به‌شکل یک بازه، به‌سادگی برابر طول بازه تعریف می‌شود. بنابراین طول پاره‌خطِ میان ۷ و ۱۳ عبارت است از $6 = 13 - 7$. به‌زبان نمادین، $\mu([7,13]) = 6$ (که معمولاً حرف یونانی μ (بخوانید میو) برای نمایش اندازه به‌کار می‌رود). روشن است که $\mu([0,1]) = 1$. دومین اصل نظریهٔ اندازه می‌گوید که اگر مجموعه‌ای مانند S برابر با اجتماع تعداد شمارایی مجموعه‌های مجزا از هم باشد، یعنی $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots$، آن‌گاه $\mu(S) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \mu(S_3) + \cdots$. جهت ارائهٔ مثالی آسان، اگر S اجتماع مجموعه‌های $[0,\frac{1}{2}]$، $[\frac{3}{4},\frac{7}{8}]$ و $[\frac{9}{10},1]$ باشد، آن‌گاه $\mu(S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{29}{40}$. در این چارچوب، احتمال به‌آسانی فهم می‌شود. در پرتاب تیر به پاره‌خط $[0,1]$، شانس برخورد تیر به پاره‌خط $[0,\frac{1}{2}]$ آشکارا $\frac{1}{2}$ است. پس احتمال فرود آمدن تیر در S مساوی است با اندازهٔ S. تا اینجا همه چیز خوب پیش رفت. اما نظرتان دربارهٔ احتمال برخورد تیر با عددی گویا چیست؟ اندازهٔ مجموعهٔ اعداد گویا در $[0,1]$ چیست؟ این مجموعه‌ای از نقاط است که در سراسر $[0,1]$ پخش شده‌اند اما به‌یقین، یک بازه را تشکیل نمی‌دهند. من از $\mathbb{Q}_1$ و I_1 برای نشان دادن مجموعه‌های نقاط گویا و گنگ در $[0,1]$ استفاده خواهم کرد.

اندازهٔ هر مجموعهٔ تک‌عضوی صفر است؛ یعنی یک نقطهٔ واحدِ a، هیچ طولی ندارد. پس

$\mu(\{a\}) = \circ$. همان‌طور که می‌دانید $\mathbb{Q}_1$ شمارا است. قضیه‌ای در نظریهٔ اندازه چنین می‌گوید: اگر S اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های اندازه ـ صفر باشد، آن‌گاه اندازهٔ S نیز صفر است. چون $\mathbb{Q}_1$ اجتماع شمارایی از مجموعه‌های تک‌عضوی است که اندازه هر یک صفر است، از قضیهٔ مذکور نتیجه می‌شود که اندازهٔ $\mathbb{Q}_1$ نیز صفر است. نظرتان دربارهٔ نقاط گنگ چیست؟ I_1 ناشمارا است، پس قضیهٔ فوق، قابل اعمال به I_1 نیست. با وجود این، به‌آسانی می‌توانیم اندازه‌اش را معین کنیم. چون $I_1 \cup \mathbb{Q}_1 = [\circ, 1]$، لذا $\mu(I_1) + \mu(\mathbb{Q}_1) = \mu([\circ, 1])$. چون $\mu([\circ, 1]) = 1$ و $\mu(\mathbb{Q}_1) = \circ$، پس $\mu(I_1) = 1$. خط حقیقی به‌طرزی چشمگیر زیر سیطرهٔ اعداد گنگ است. در چارچوب نظریهٔ احتمال، شانس برخورد تیر به عددی گنگ یک است.

نظریهٔ اندازه به ما کمک می‌کند تا دربارهٔ اندازهٔ بعضی از مجموعه‌های کاملاً عجیب و غریب و نه فقط اعداد گویا و گنگ، سخن بگوییم. لحظاتی بعد با یکی از این مجموعه‌های عجیب رویارو خواهیم شد. نکتهٔ کلیدی برای به‌خاطر سپردن، این است که اندازهٔ هر زیرمجموعهٔ شمارا از $[\circ, 1]$ صفر است و از این‌رو، احتمال برخورد تیر به هر یک از اعضای چنین مجموعه‌ای صفر است.

۴. به هم بافتن زنجیر استدلال

در این بخش، تمامی آنچه را که در بخش‌های قبل تهیه دیدیم به‌کار خواهیم برد تا استدلال فرایلینگ را بازسازی کنیم.

۱. ZFC را مفروض می‌داریم و علاوه بر این (با هدف تولید یک تناقض)، فرض می‌کنیم که CH صادق باشد.

۲. به‌منظور گزینش دو عدد حقیقی، دو تیر به بازهٔ $[\circ, 1]$ از اعداد حقیقی پرتاب می‌کنیم.

۳. نقاط پاره‌خط می‌توانند خوش‌ترتیب شوند به‌طوری که برای هر عدد $q \in [\circ, 1]$، مجموعهٔ $\{p \in [\circ, 1] : p \prec q\}$ شمارا است. (توجه کنید که $\prec$ رابطه‌ای خوش‌ترتیب است نه رابطهٔ «کوچکتر از» $<$). خوش‌ترتیبی با ZFC تضمین می‌شود. این واقعیت که این مجموعه شمارا است، همان‌طور که در بالا توضیح دادیم، از طبیعت خوش‌ترتیبی هر مجموعه با عدد اصلی $\aleph_1$ نشأت می‌گیرد. برای آن‌که موضوع را مرور کنیم، یک عدد اصلی به‌عنوان کوچکترین عضو در میان اعداد ترتیبی یکریخت تعریف می‌شود، پس پارهٔ آغازینی که q تعریف می‌کند باید عدد اصلی‌اش از عدد اصلی $[\circ, 1]$ کوچکتر باشد. با مفروض گرفتن CH، $\aleph_1$، نخستین عدد اصلی ناشمارا است. بنابراین $\{p \in [\circ, 1] \ : \ p \prec q\}$ باید شمارا باشد.

۴. مجموعهٔ اعدادی که پیش از p در خوش‌ترتیبی ظاهر می‌شوند را S_p می‌نامیم. فرض کنید نخستین پرتاب، به نقطهٔ p و دومین پرتاب، به نقطهٔ q اصابت کند. یا $p \prec q$ یا برعکس. اولی را فرض می‌گیریم. بنابراین $p \in S_q$. توجه کنید به‌خاطر دلیلی که بلافاصله پیش از این بیان شد، S_q شمارا است.

۵. چون دو تیر از یکدیگر مستقل‌اند، می‌توانیم بگوییم پرتابی که در نقطهٔ q فرود می‌آید، مجموعهٔ S_q را به طریقی تعریف یا تثبیت می‌کند که مستقل از پرتابی است که p را گزینش می‌کند.

۶. اندازهٔ هر مجموعهٔ شمارا صفر است، پس $\mu(S_q) = 0$. در نتیجه احتمال فرود تیر در نقطه‌ای از S_q نیز صفر است.

۷. با استدلالی مشابه، می‌توانیم مجموعهٔ S_p از نقاطی را که در خوش‌ترتیبی پیش از p ظاهر می‌شوند، تعریف کنیم و اندازهٔ آن هم صفر است: $\mu(S_p) = 0$.

۸. بالأخره یکی از این دو تیر باید در مجموعه‌ای فرود آید که توسط مجموعهٔ دیگر تعریف شده است؛ هرچند که احتمال چنین پیشامدی صفر است. می‌توان به‌گونه‌ای دیگر نیز این معضل را توضیح داد. گیریم تیری را من و تیری را شما پرتاب کنید. اگر عدد شکار شده با تیر من، از عدد شما بزرگتر بود، من برنده‌ام و در غیر این صورت، شما برنده‌اید. بر اساس آنچه گفته شد، هم من و هم شما به‌دلیل تقارن پرتاب‌ها خود را برندهٔ به‌حق می‌بینیم و این با عقل عرفی نمی‌خواند.

بنابراین باید فرض اولیه، CH، را رها کنیم، زیرا به چنین امر نامعقولی منجر می‌شود. پس CH ابطال می‌شود و لذا تعداد نقاط روی خط از $\aleph_1$ بیشتر است. به عبارت دیگر، فرض پیوستار با عقل عرفی در تعارض است.

فرایلینگ از آزمون تیر استفاده می‌کند تا دربارهٔ تعدادی از نتایج بنام در نظریهٔ مجموعه‌ها به جدل بنشیند. به‌عنوان مثال، او اصل انتخاب، اصل خوش‌ترتیبی، بنداشت مارتین و بسیاری از دیگر اصول را مورد تردید قرار می‌دهد. برای مطالعهٔ بیشتر، خوانندگان را به مقالهٔ وی ([۳]) ارجاع می‌دهیم.

۵. نگرش پایانی

اثبات‌های تصویری و آزمایش‌های ذهنی منابع بالقوهٔ معرفت ریاضی هستند که وسیعاً نامکشوف باقی مانده‌اند. آن‌ها باید کشف شوند و مورد بهره‌برداری قرار گیرند. این منبعی است که تاکنون تنها از آن به‌عنوان ابزاری راهگشایانه و کمکی روانشناختی استفاده شده است نه چیزی بیشتر. بر خلاف چنین پنداری، همان‌گونه که در سراسر [۲] استدلال شده است، بسی بیش از اینها میسر است. تنها کسانی که مأیوس و فاقد قدرت تخیّل‌اند ممکن است این دیدگاه که برخی مسائل ریاضی واقعاً حل‌ناپذیرند را قبول کنند. چنین مسائلی ممکن است با روش‌های موجود حل‌ناپذیر باشند اما دلیلی وجود ندارد که خود را گرفتار چنین ابزارهای ناتوانی کنیم. شاید آزمایش‌های ذهنی از پس حل همهٔ مسائل برنیایند اما ممکن است بعضی را که به شیوه‌ای دیگر قابل حل نیستند، حل کنند. «نه خدا و نه شیطان» و نه حتی گاوس استفاده از آن‌ها را قدغن نکرده‌اند.

مراجع

[1] P. Bartha, "Symmetry and Brown-Freiling refutation of the Continuum Hypothesis", *Symmetry*, **3**(2011), 636-652.

[2] James Robert Brown, *Philosophy of mathematics: A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*, second edition, Routledge, 2008.

[3] C. Freiling, "Axioms of symmetry: Trowning darts at the real number line", *Journal of symbolic logic*, **51**, 190-200, 1986.

[4] G. H. Hardy, "Mathematical proof", *Mind*, **38**, 1929.

[5] K. Hauser, *What new axioms could not be*, personal homepage.

[6] D. Mumford, *Dawning of the age of stochasticity* in V. Arnold (ed.) in Mathematics, Frontires and Perspectives, New York, American Mathematical Society, 2000.

[۷] ایان استیوارت، «بدرود بورباکی، تغییر دیدمان در ریاضیات»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال ۲۷، شمارهٔ پیاپی ۴۲، ۱۳۸۷.

[۸] کورت گودل، «فرض پیوستار کانتور چیست ؟»، ترجمهٔ ضیاء موحد،نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۸.

احسان ممتحن
گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج
momtahan_e@hotmail.com