فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۰ (پاییز ۱۳۹۱) صص. ۵۹ تا ۸۱

شفاف‌سازی تصاویر با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین و الگوریتم‌های بهینه‌سازی

مازیار صلاحی، حبیبه رمضان‌نژاد آزاربنی

چکیده

شفاف‌سازی تصاویر یکی از مسائل مهم پردازش تصویر به شمار می‌رود و از نوع مسائل وارون است. روش‌های کلاسیک برای حل این نوع مسائل، روش‌های گسسته‌سازی هستند که به‌دلیل بدحالت بودن ماتریس ضرایب، معمولاً به جواب قابل قبول منجر نمی‌شوند. در اینجا ابتدا به معرفی مقدمات مورد نیاز جبرخطی در پردازش تصویر می‌پردازیم و سپس مفاهیم اولیه تصویر را بیان می‌کنیم. در ادامه، رفتار روش‌های منظم‌سازی، تجزیهٔ مقادیر تکین و تجزیهٔ مقادیر تکین برشی را در حل این مسائل بررسی می‌کنیم و به مقایسه آن‌ها می‌پردازیم.

۱. مقدمه

در تصویربرداری، اغلب به دلایل متفاوتی از داشتن یک تصویر شفاف محروم می‌شویم که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به محدودیت میزان دریافت نور توسط لنز دوربین، حرکت کردن تصویرگر و یا شیئی که از آن تصویربرداری می‌شود، وجودِ گرد و غبار در محیط محل عکسبرداری، دور بودن جسم از دوربین و... اشاره کرد. از طرف دیگر، گاهی اوقات می‌خواهیم از تصویر و یا اطلاعاتی که به‌صورت عکس در اختیار داریم، محافظت کنیم به‌طوری که تصویر قابل رؤیت نباشد و هر گاه نیاز به بازبینی آن باشد، بتوانیم آن را به حالت اولیه برگردانیم. با این فرض، شناخت روش‌هایی که

بتوان تصویری را غیرشفاف [1] کرد و سپس تصویری شفاف [2] از آن به‌دست آورد، ضرورت دارد. در سال‌های اخیر، مطالعات گسترده‌ای در این زمینه به عمل آمده است. به‌عنوان مثال، افرادی چون هنسن [3]، نگی [4]، اولری [5] و ... با کمک روش‌های تکراری به بازسازی تصاویر پرداخته‌اند ([۳]).

در این مقاله، ابتدا به معرفی برخی مقدمات جبرخطی مورد نیاز در شفاف‌سازی تصاویر می‌پردازیم. سپس مقدمه‌ای از تصویر را بیان می‌کنیم و با استفاده از روش‌هایی همچون تجزیهٔ مقادیر تکین، تجزیهٔ مقادیر تکین برشی و منظم‌سازی تیخونف [6] به شفاف‌سازی آن‌ها می‌پردازیم. سرانجام، با ارائهٔ چند مثال، نقاط قوت و ضعف روش‌های یادشده را تشریح می‌کنیم.

۲. مقدمات جبرخطی

در این بخش، به معرفی نوعی از تجزیه می‌پردازیم که اهمیت زیادی در مباحث مختلف ریاضی، فیزیک و مهندسی دارد. ابتدا به وجود این تجزیه و برخی خواص مهم آن می‌پردازیم و سپس اهمیت آن را در پردازش تصویر مورد مطالعه قرار می‌دهیم ([۱]).

قضیه برای ماتریس $A_{m\times n}$، ماتریس‌های متعامد $U_{m\times m}$ و $V_{n\times n}$ وجود دارند به‌طوری که

$$U^T AV = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma$$

که در آن، Σ_1 یک ماتریس قطری است. عناصر ماتریس Σ همگی نامنفی‌اند و به‌صورت ناافزایشی مرتب شده‌اند. تعداد عناصر قطری و ناصفر ماتریس Σ، بُعد ماتریس A را نشان می‌دهد. این تجزیهٔ یکتا را تجزیهٔ مقادیر تکین (SVD) ماتریس A می‌گویند.

حال جواب دستگاه

$$Ax = b \tag{1}$$

وقتی A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد با کمک تجزیهٔ SVD به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$x = V^{-1}\Sigma^{-1}U^{-T}b = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} U^T b = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

اما با توجه به این‌که در بسیاری از مسائل واقعی، ماتریس ضرایب دستگاه (۱) بدحالت است،

1) Blur 2) Deblur 3) P. C. Hansen 4) J. G. Nagy 5) D. P. O'leary 6) Tikhonov

جواب حاصل از روش SVD می‌تواند از جواب واقعی بسیار دور باشد. برای تشریح این موضوع، مسألهٔ بدحالت shaw از [۴] را در نظر می‌گیریم. در این مسأله، شکل گسستهٔ معادلهٔ انتگرال فردهلم در بازهٔ $[\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ محاسبه می‌شود که در آن، هستهٔ k و جواب $f(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

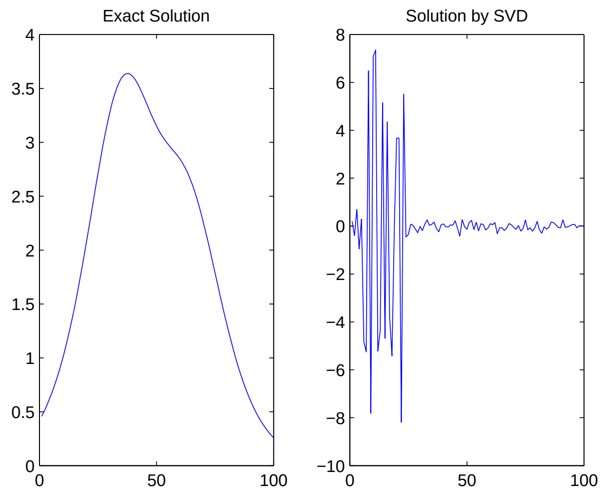
$$k(s,t) = (\cos(s) + \cos(t))(\sin(u)/u)^{۲} \quad , \quad u = \pi(\sin(s) + \sin(t)),$$

$$f(t) = a_{۱} \exp(c_{۱}(t - t_{۱})^{۲}) + a_{۲} \exp(-c_{۲}(t - t_{۲})^{۲}).$$

این مسأله با دریافت عدد زوج و صحیح n به‌عنوان بُعد ماتریس، بردار b، ماتریس A و بردار جواب واقعی x را در اختیار قرار می‌دهد. در نرم‌افزار متلب ([۷]) با دستورالعمل زیر این مسأله قابل فراخوانی و اجراست:

```
>> [ A , b , x ] = shaw ( n ) ;
```

جواب واقعی و جواب محاسبه شده با روش SVD برای مسألهٔ shaw با بُعد ۱۰۰ در شکل ۱ آمده است. همان‌طور که می‌بینیم، جواب محاسبه شده با جواب واقعی بسیار متفاوت است. لذا در ادامه، به معرفی تجزیهٔ مقادیر تکین برشی TSVD می‌پردازیم که می‌تواند نتایج حاصل از حل دستگاه‌های بدحالت را با روش‌های مختلف بهبود بخشد.



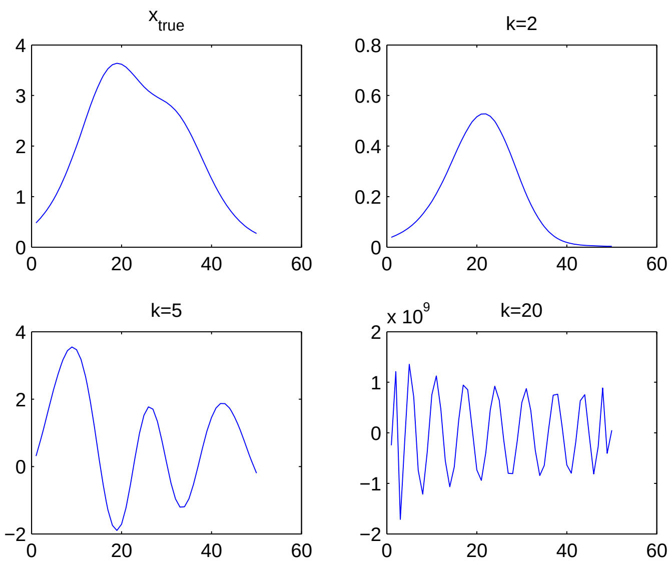
شکل ۱. حل دستگاه (۱) به روش SVD با استفاده از مسألهٔ shaw(100)

همان‌طور که می‌دانیم، تعداد ستون‌های مستقل خطی ماتریس A، رتبهٔ ماتریس است. از طرف

دیگر، رتبهٔ ماتریس A برابر با تعداد مقادیر تکین مثبت آن است. از لحاظ ریاضی، این تعریف کاملاً درست است، اما از نظر عددی به‌علت وجود خطاهای ناشی از تقریب، گسسته‌سازی و گردکردن، ممکن است ماتریس، استقلال خطی خود را حفظ نکند. به عبارت دیگر، در مسائل بدحالت گسسته‌سازی شده، با وجود این‌که ماتریس A از لحاظ ریاضی کمبود رتبه ندارد، اما کمبود رتبهٔ عددی دارد. این ناسازگاری به‌علت وجود یک یا چند مقدار تکین بسیار کوچک رخ می‌دهد. وجود این مقادیر تکین کوچک می‌تواند باعث افزایش تأثیر خطای $u_i^T b$ در حل دستگاه (۱) شود. در روشی که به روش تجزیهٔ مقادیر تکین برشی (TSVD) معروف است، ماتریس دیگری را جایگزین A می‌کنند. در واقع، ماتریس A_k تقریبی از ماتریس A است که به‌جای مقادیر تکین کوچک $\{\sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n\}$، مقدار صفر جایگزین می‌شود، یعنی $\Sigma_k = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$. بنابراین، $A_k = U^T \Sigma_k$. حال اگر به‌جای دستگاه (۱)، دستگاه $A_k x = b$ را حل کنیم، جواب آن به‌صورت

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

است. جواب حاصل از حل دستگاه با روش TSVD با برش‌های مختلف در شکل ۲ آمده است.



شکل ۲. برش‌های مختلف از مسألهٔ shaw(50)

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با انتخاب برش‌های مناسب، روش TSVD تقریب قابل قبولی از جواب واقعی را نتیجه می‌دهد. در بخش‌های بعدی چند معیار برای انتخاب پارامتر k معرفی می‌شوند.

۳. خلاصه‌ای از ساختار عدسی دوربین و بررسی رفتار آن

۱) **عدسی محدب:** هرگاه مجموعه‌ای از منشورها طوری برش داده شوند که دارای لبه‌های باریک و قسمت میانی ضخیم باشند، یک عدسی محدب به‌دست می‌آید.
۲) **کانون عدسی محدب:** هرگاه یک دسته نور مستقیم را به یک عدسی محدب بتابانیم، هنگام عبور از عدسی محدب، شعاع‌های نور در یک نقطه جمع می‌شوند. این نقطه را کانون عدسی محدب می‌نامند و آن را با F و شعاع عدسی را با $۲F$ نشان می‌دهند.
۳) **فاصلهٔ کانونی عدسی محدب:** فاصلهٔ بین مرکز عدسی تا کانون آن را فاصلهٔ کانونی عدسی محدب گویند.
۴) **تصویر حقیقی:** وقتی پرتوهای حقیقی نور همدیگر را قطع کنند، با قرار دادن پرده‌ای در محل تقاطع، می‌توان تصویر جسم را مشاهده کرد. در این حالت، تصویر از نوع حقیقی است.
۵) **تصویر مجازی:** وقتی پرتوهای حقیقی، همدیگر را قطع نکنند ولی به نظر برسد که امتداد آن‌ها به هم می‌رسند، در این حالت هیچ تصویری روی پرده ظاهر نمی شود. اگرچه می‌توان به‌صورت نظری این برخورد پرتوها را نشان داد، ولی در عمل، هیچ‌گاه این امر رخ نمی‌دهد. به این نوع از تصویر، تصویر مجازی گفته می شود.

یک جسم می‌تواند در فاصله‌های متفاوتی از مرکز عدسی قرار گیرد، بنابراین، با توجه به مکان قرار گرفتن جسم، تصاویر متفاوتی به‌دست می‌آیند. این مطلب را می‌توان در چند حالت زیر بیان کرد.

حالت ۱: وقتی جسم در فاصلهٔ کانونی عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، مجازی، بزرگتر از جسم، مستقیم و در همان سمت جسم تولید می‌شود.
حالت ۲: وقتی جسم در کانون عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، حقیقی، بزرگتر از جسم، وارون و در طرف دیگر عدسی و در فاصلهٔ بی‌نهایت فیزیکی تولید می‌شود.
حالت ۳: وقتی جسم در فاصلهٔ F تا $۲F$ عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، حقیقی، کوچکتر از جسم، وارون و در طرف دیگر عدسی و در خارج از $۲F'$(دو برابر کانون عدسی که در سمت دیگر آن وجود دارد) تولید می‌شود.
حالت ۴: وقتی جسم، روی $۲F$ عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، حقیقی، هم‌اندازه با جسم،

وارون و در طرف دیگر عدسی روی $۲F'$ تولید می‌شود.

حالت ۵: وقتی جسم، خارج از $۲F$ عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، حقیقی، کوچکتر از جسم، وارون و در طرف دیگر عدسی در فاصلهٔ F' تا $۲F'$ تولید می‌شود.

۴. مفاهیم اولیهٔ تصویر

تصاویر رقمی[۱] از تعداد زیادی مربعات کوچک به نام پیکسل[۲] تشکیل شده‌اند. هر پیکسل یک شمارهٔ رقمی[۳] دارد که میزان روشنایی آن پیکسل را نشان می‌دهد. یک تصویر کوچک حدوداً از ۲۵۶ × ۲۵۶ پیکسل و عکس‌های بزرگتر از ۵ تا ۱۰ میلیون پیکسل ساخته شده‌اند. تصاویر می‌توانند خاکستری[۴] یا رنگی باشند و نوع رنگی آن نیز دارای زیر شاخه‌هایی مانند RGB[۵]، CMY[۶] و HSV[۷] است. البته نوع غیررنگی آن که معمولاً به آن سیاه و سفید می‌گویند، وقتی به‌وجود می‌آید که مؤلفه‌های R، G و B مقداری یکسان داشته باشند. تعداد بیت‌های تشکیل دهندهٔ تصاویر نیز متفاوت است. به‌عنوان مثال، تصاویر RGB، ۳۶، تصاویر CMY، ۶۴ و تصاویر سیاه و سفید، ۱۶ بیتی هستند. رنگ‌ها می توانند در بازه‌های (۰, ۲۵۵) و (۰, ۶۵۵۳۵) نمایش داده شوند و همهٔ این بازه‌ها قابل انتقال به بازهٔ (۰, ۱) هستند. کران پایین هر بازه نمایندهٔ رنگ سیاه، کران بالا، نمایانگر رنگ سفید و مقادیر درون بازه، به‌صورت افزایشی، معرف رنگ‌های تیره تا روشن هستند. تصاویر می‌توانند پسوندهای متفاوتی داشته باشند که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به GIF[۸]، JPEG[۹]، PNG[۱۰] و TIFF[۱۱] اشاره کرد. بازسازی تصویر در دو حوزهٔ مکانی و فرکانسی انجام می‌گیرد. در حوزهٔ مکانی، با استفاده از پیکسل‌های همسایه و در حوزهٔ فرکانسی با کمک بسط فوریه و موجک، کار بهبود تصویر انجام می‌گیرد. بازسازی تصاویر در حوزهٔ مکانی به‌علت وابسته شدن آن به پیکسل‌های همسایه که همان ماتریس‌های تشکیل دهندهٔ تصویر هستند، ما را به استفاده از مفاهیم جبرخطی هدایت می کند. در اینجا شفاف‌سازی تصویر را در حوزهٔ مکانی بررسی می‌کنیم ([۳]).

تابعی که میزان و نوع تار شدنِ ناشی از تصویربرداری از منبع نقطه‌ای نور را شرح می‌دهد، PSF[۱۲] نامیده می‌شود. به بیان ریاضی، منبع نقطه‌ای[۱۳]، ماتریسی است که در آن به‌جز یک یا چند درایهٔ محدود که مقدار برابر یک دارند، سایر درایه‌ها صفر هستند.

---

1) Digital 2) Pixel 3) Digital number 4) Grayscale 5) Red Green Blue 6) Cyan Magenta Yellow 7) Hue Saturation Value 8) Graphics Interchange Format 9) Joint Photographic Experts Group 10) Portable Network Graphics 11) Tagged Image File Format 12) Point Spread Function 13) Point source

به بیان دیگر، وقتی از یک عکس که به‌جز یک یا چند پیکسل سفید، سایر پیکسل‌ها، سیاه باشند، دوباره عکسبرداری کنیم، این کار باعث می‌شود که پیکسل‌های روشن در همسایگی خود گسترده شوند. تابع PSF چگونگی این گسترده شدن روشنایی را بیان می‌کند. فرمول‌های صریحی از تابع PSF وجود دارند که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به توابع زیر اشاره کرد.

- اگر p_{ij} مؤلفه‌ای از ماتریس مورد نظر باشد، در حالت خارج از محدودهٔ تمرکز لنز دوربین[1]، تابع PSF را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & (i-k)^2 + (j-l)^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن، k و l به‌ترتیب طول و عرض پیکسل مورد مطالعه را نسبت به مرکز (i,j) و شعاع r نشان می‌دهند. در نرم‌افزار متلب به این تابع، PSF Defocus گویند.

- نوع دیگری از این توابع که معمولاً در تصویر برداری‌هایی که تحت تأثیر شرایط فضای موجود در ناحیهٔ عکس‌برداری قرار دارند، به‌کار برده می‌شود، تابع گوسی[2] است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i-k \\ j-l \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_1^2 & \rho^2 \\ \rho^2 & s_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i-k \\ j-l \end{pmatrix}\right)$$

که در آن، s_1 و s_2 جهت‌ها و ρ شعاع PSF را نسبت به مرکز (k,l) نشان می‌دهد.

معمولاً PSF گوسی مورد استفاده در تصاویر، از نوع متقارن گردشی است که می‌توان با شعاع s میزان عدم شفافیت تصویر را کنترل کرد. در حالت Defocus، این کنترل با شعاع r انجام می‌گیرد. با توجه به ساختار عدسی دوربین‌های عکسبرداری و چگونگی ایجاد تصویر بر اساس مکان قرار گرفتن منبع نقطه‌ای نور، شعاع PSF را تغییر می‌دهیم. اگر این افزایش شعاع تا جایی ادامه پیدا کند که منبع نقطه‌ای نور همچنان در خارج از فاصلهٔ کانونی عدسی دوربین قرار گیرد، چون تصویر ایجاد شده تصویری حقیقی است، می‌توانیم آن را روی پرده ظاهر کنیم. ولی اگر منبع نقطه‌ای در فاصلهٔ کانونی واقع شود، تصویر آن مجازی خواهد بود و روی پرده ظاهر نمی‌شود. با توجه به ساختار فیزیکی PSF گوسی که به‌صورت نقطه‌ای روشن همراه با هاله‌ای از روشنایی است، می‌توان شعاع‌های متفاوتی را بررسی کرد.

1) Out of focus 2) Gaussian function

به‌عنوان مثال، در PSF گوسی با شعاع $s = ۵$، نقطهٔ روشن در بی‌نهایت فیزیکی عدسی واقع می‌شود و تصویر ایجاد شده روی پرده نسبتاً واضح خواهد بود، اما اگر این شعاع را به $s = ۱۰$ افزایش دهیم، قسمتی از هالهٔ روشنایی در فاصله‌های F تا $۲F$ عدسی دوربین قرار می‌گیرد و تصویر حقیقی آن‌ها نیز روی پرده به همان صورت غیرشفاف تشکیل می‌شود. بنابراین، تصویر نهایی وضوح کافی نخواهد داشت. ولی اگر شعاع PSF را آن‌قدر بزرگ در نظر بگیریم که هالهٔ روشنایی، در فاصلهٔ کانونی واقع شود، آن‌گاه تصویر نهایی وضوح بهتری خواهد داشت. چون از یک طرف، تصویر هالهٔ روشن به‌علت مجازی بودنش، روی پرده ظاهر نمی‌شود و از طرف دیگر، کل منبع نقطه‌ای، روشنایی تقریباً یکنواخت می‌شود و تصویرش نیز دارای وضوح بهتری خواهد بود. در حالت Defocus، چون هالهٔ روشنایی وجود ندارند، یا تصویر به‌علت مجازی بودن تشکیل نمی‌شود و یا در صورت حقیقی بودن، به‌صورت کاملاً شفاف، تشکیل می‌شود. این پدیده‌ها در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده‌اند.

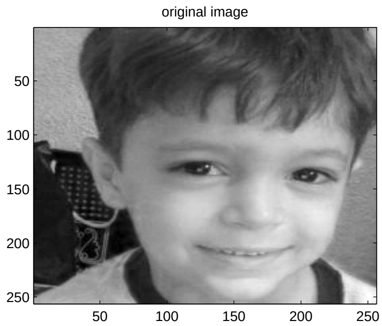
(شرایط مرزی): وقتی یک پیکسل تار وجود داشته باشد، شناخت میزان تاری همسایه‌های این پیکسل، به بازسازی مطلوب تصویر کمک می‌کند. قوانین و شرایطی را در لبه‌های پیکسل تار در نظر می‌گیریم که به آن‌ها شرایط مرزی می‌گویند و به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

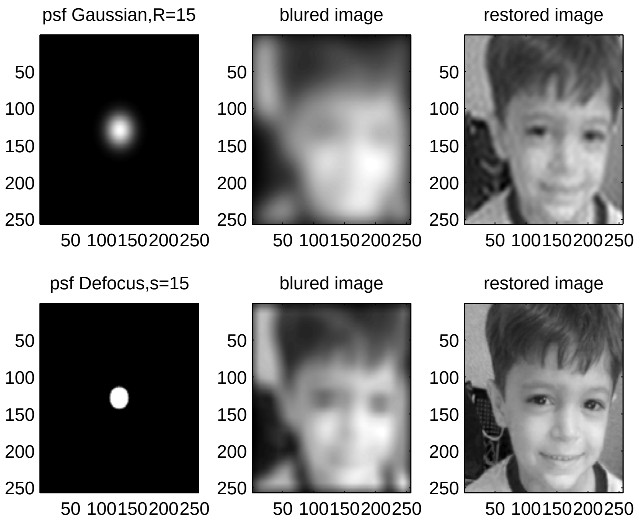
الف. (شرایط مرزی صفر): ساده‌ترین نوع از شرایط این است که فرض کنیم همهٔ پیکسل‌ها در خارج از پیکسل‌های مورد مطالعه، سیاه هستند، یعنی مقدار آن‌ها در خارج از حوزهٔ مطالعه برابر صفر است. در این حالت، می‌توان تصویر اصلی را درون یک تصویر بزرگ‌تر، جاسازی کرد. اگر تصویر اصلی را X بنامیم، آن‌گاه شرایط مرزی صفر را می‌توان به‌صورت $X_{ext} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & X & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ بیان کرد.

ب. (شرایط مرزی متناوب): هرگاه تصویر، خود را در همهٔ جهت‌ها تکرار کند، در شرایط مرزی متناوب قرار می‌گیرد. اگر تصویر اصلی را X بنامیم، شرایط مرزی متناوب را می‌توان به‌صورت $X_{ext} = \begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}$ بیان کرد.

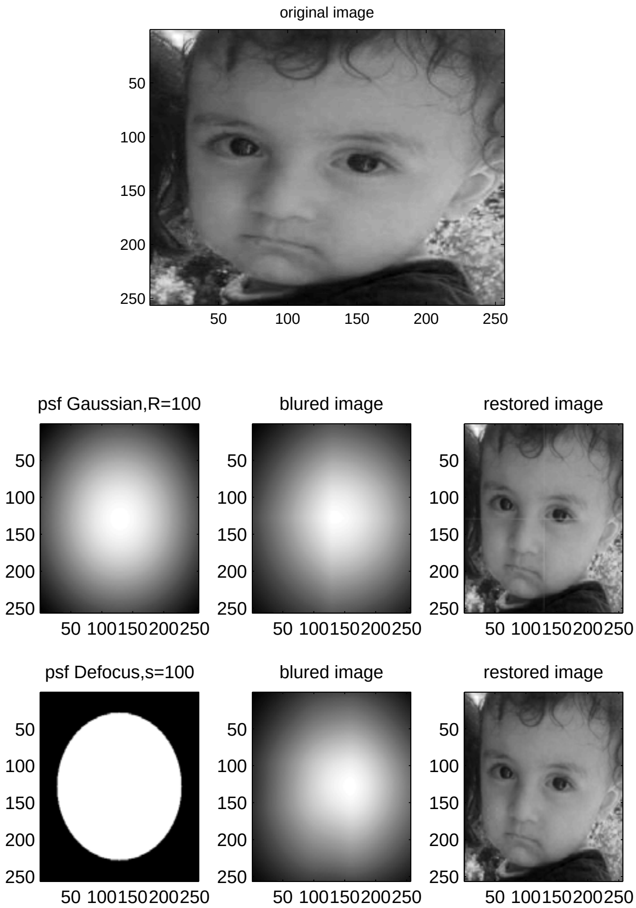
پ. (شرایط مرزی انعکاسی): وقتی همسایگی پیکسل‌های مورد مطالعه، تصویری ازپیکسل‌های درون آن باشد، شرایط مرزی انعکاسی ایجاد می‌شود. اگر تصویر اصلی را X بنامیم، آن‌گاه شرایط مرزی انعکاسی را می‌توان به‌صورت $X_{ext} = \begin{pmatrix} X_x & X_{ud} & X_x \\ X_{lr} & X & X_{lr} \\ X_x & X_{ud} & X_x \end{pmatrix}$ بیان کرد که در آن، $X_{lr} = fliplr(X)$ تابعی است که جای مؤلفه‌های چپ PSF را با مؤلفه‌های راست عوض می‌کند. به همین ترتیب، تابع $X_{ud} = flipud(X)$ جای مؤلفه‌های بالای PSF را با مؤلفه‌های پایین آن

عوض می‌کند و تابع $X_x = flipud(X_{ud})$ به‌صورت قطری این جابه‌جایی‌ها را انجام می‌دهد.





شکل ۳. در این تصویر چون شعاع PSF ($s = R = ۱۵$) تا اندازه‌ای بزرگ شده است که هاله‌های روشنی در PSF گوسی، تولید تصویر کرده‌اند، رفتار نامطلوبی نسبت به PSF Defocus مشاهده می‌شود.



شکل ۴. در این تصویر، چون شعاع PSF ($s = R = ۱۰۰$) تا اندازه‌ای بزرگ شده است که هاله‌های روشنی در PSF گوسی، وارد فاصلهٔ کانونی شده‌اند و قادر به تولید تصویر حقیقی نیستند، رفتاری تقریباً مشابه PSF Defocus مشاهده می‌شود.

برای شناخت بهتر PSF و شرایط مرزی، مثال ماتریسی زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال. اگر تصویر اصلی و همسایگی‌های آن به‌صورت $[w_1, w_2, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2]^T$ و PSF این تصویر، $[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5]^T$ باشد و مرکز این PSF درایهٔ p_3 باشد، آن‌گاه می‌توان بردار $[b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]^T$ را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

حال شرایط مرزی مختلف را روی این دستگاه اعمال می‌کنیم. در شرایط مرزی صفر، همسایگی‌ها که همان لبه‌های تصویر اصلی هستند در نظر گرفته نمی‌شوند و بنابراین $y_1 = y_2 = w_1 = w_2 = 0$. در این حالت، دستگاه (۲) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

به ماتریسِ سمت راست (۳) که درایه‌های قطری آن مقدارهای ثابت دارند، ماتریس Toeplitz با پارامتر p گویند. در شرایط مرزی متناوب، چون $w_1 = x_4, w_2 = x_5, y_1 = x_1, y_2 = x_2$، دستگاه (۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & p_5 & p_4 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_5 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_5 & p_4 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

به ماتریس (۴) که در هر سطر و هر ستون آن یک جابه‌جایی رخ داده است، ماتریس چرخشی[1] گویند. در شرایط مرزی انعکاسی، چون منظرهٔ بیرون تصویر اصلی، بازتاب آینه‌گون از درون تصویر است،

1) Circulant matrix

شرایط $w_1 = x_2, w_2 = x_1, y_1 = x_5, y_2 = x_4$ برقرار می‌شوند و دستگاه (۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3+p_4 & p_2+p_5 & p_1 & p_5 & p_4 \\ p_4+p_5 & p_3 & p_2 & p_1 & p_5 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2+p_1 \\ p_2 & p_1 & p_5 & p_4+p_1 & p_3+p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

ماتریس ظاهر شده در (۵) ماتریس Toeplitz-Plus-Hankel نامیده می‌شود. از ترکیب این سه نوع ماتریس، ماتریس‌های بلوکی $BHTB$، $BTHB$، $BTTB$ و $BHHB$ ساخته می‌شوند.

۹. شفاف‌سازی تصویر با استفاده از روش‌های جبرخطی

شفاف‌سازی تصویر، یک مثال از حل مسالهٔ بدحالت $b = Ax + e$ است که در آن، بردار b نشان‌دهندهٔ تصویر غیرشفاف، ماتریس A عملگر تارکنندهٔ تصویر و بردار e میزان نویز[1] موجود در تصویر x را نشان می‌دهد. ماتریس‌های $(A_r)_{n\times n}$ و $(A_c)_{m\times m}$ را که به‌ترتیب ماتریس‌های عملگر افقی و قائم می‌نامند و حاصلضرب کرونکر آن‌ها، $A_r \otimes A_c$، ماتریس عملگر تاری A را می‌سازد، به‌دست می‌آوریم. اگر به‌طور مستقیم این ماتریس‌ها قابل محاسبه نباشند، آن‌گاه می‌توان تقریب مناسبی از آن‌ها را استفاده کرد ([۳]، [۴]، [۵]). فرض کنیم P همان PSF با بُعد $m \times n$ باشد و بتوان آن را به‌صورت حاصلضرب دو زیر بردار نمایش داد:

$$P = cr^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_n \end{pmatrix}.$$

ساختار A_r و A_c به نوع شرایط مرزی وابسته است. برای مثال اگر PSF یک ماتریس ۳ × ۳ باشد، آن‌گاه داریم

$$P = cr^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1r_1 & c_1r_2 & c_1r_3 \\ c_2r_1 & c_2r_2 & c_2r_3 \\ c_3r_1 & c_3r_2 & c_3r_3 \end{pmatrix}.$$

1) Noise

در شرایط مرزی صفر، ماتریس‌های A_r و A_c به‌صورت زیر هستند:

$$A_r = \begin{pmatrix} r_2 & r_1 & 0 \\ r_3 & r_2 & r_1 \\ 0 & r_3 & r_2 \end{pmatrix} \ , \ A_c = \begin{pmatrix} c_2 & c_1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}.$$

لازم به ذکر است که مقادیر r و c از محاسبهٔ بزرگترین مقدار تکین ماتریس P و بردار تکین متناظر آن به‌دست می‌آید، که در نرم‌افزار متلب با استفاده از فرمان‌های زیر قابل محاسبه هستند ([۷]):

```
>> [ U , S , V ] = svds ( P , 1 );
>> c = sqrt ( S ) * U ;
>> r = sqrt ( S ) * V ;
```

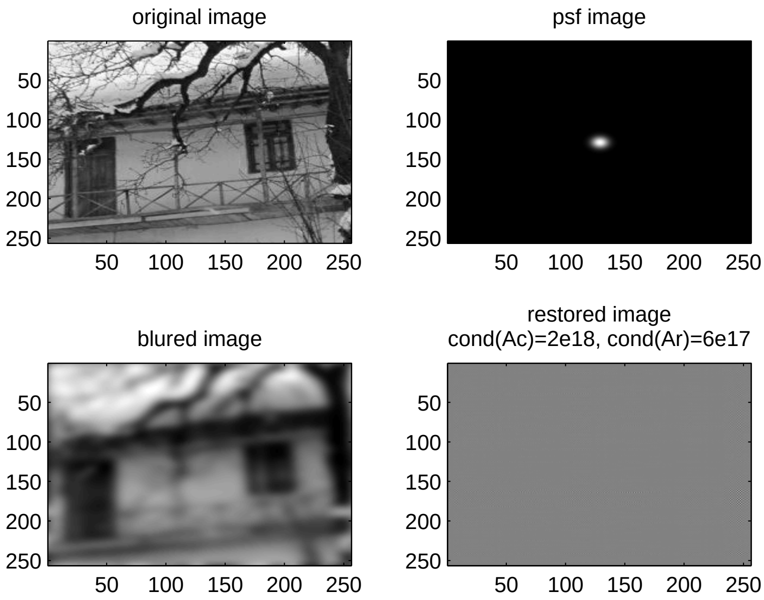
اگر ماتریس A_r دارای بُعد $n \times n$ و ماتریس A_c دارای بُعد $m \times m$ باشد، طبق خواص ضرب کرونکر، بعد ماتریس $A = A_r \bigotimes A_c$ برابر با $mn \times mn$ خواهد بود. بنابراین، دستگاه $Ax = b$ هم‌ارز رابطهٔ ماتریس ــ ماتریس $B = A_c X A_r^T$ است که در آن، $b = Vec(B)$ و $x = Vec(X)$. چون بُعد ماتریس‌های A_r و A_c نسبت به بُعد A کوچک است، ساختار ساده‌تری در اختیار است و از طرف دیگر، محاسبات ماتریس ــ ماتریس در نرم‌افزار متلب به‌صورت سادهٔ زیر قابل انجام است.

```
>> B = Ac * X * Ar';
```

ساختار ماتریس‌های A_r و A_c با در نظر گرفتن شرایط مرزی صفر، متناوب و انعکاسی به‌ترتیب به‌صورت ماتریس‌های Toeplitz، چرخشی Toeplitz-Plus-Hankel است که ماتریس‌های چندقطری، متقارن و نسبت به ماتریس A خوش حالت‌تر هستند. بنابراین، بهتر است از این ماتریس‌ها استفاده شود. همچنین اگر ماتریس‌های A_r و A_c نامنفرد باشند، آن‌گاه حاصل $(A_r \bigotimes A_c)x = b$ را می‌توان به‌صورت $X = A_c^{-1} B A_r^{-T}$ و با دستورالعمل زیر به‌دست آورد:

```
>> X = Ac \ B / Ar';
```

در شکل ۵ به علت استفادهٔ مستقیم از ماتریس‌های A_r و A_c و بدحالت بودن آن‌ها نتیجهٔ نامطلوبی از بازسازی تصویر حاصل شده است.



شکل ۵. بازسازی نامطلوب تصویر به‌کمک الگوریتم $X = A_c^{-1} B A_r^{-T}$. عدد حالت A_r و A_c بسیار بزرگ است.

روش شفاف‌سازی تصاویر با استفاده از تجزیهٔ SVD سه مرحله دارد:

الف) تجزیهٔ SVD ماتریس A_c را به‌صورت $A_c = U_c \Sigma_c V_c^T$ به‌دست آورید.

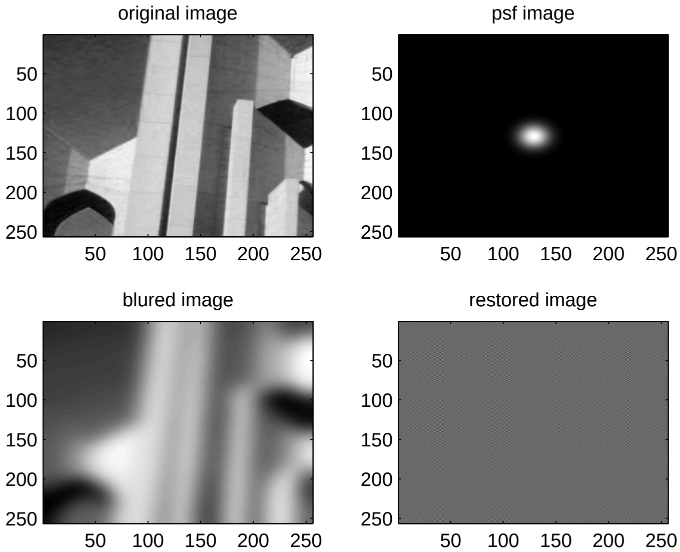
ب) تجزیهٔ SVD ماتریس A_r را به‌صورت $A_r = U_r \Sigma_r V_r^T$ به‌دست آورید.

پ) حاصل $X = A_c^{-1} B A_r^{-T}$ را به‌شکل $X = (U_c \Sigma_c V_c^T)^{-1} B (Ur \Sigma_r V_r^T)^{-T}$ در آورید. چون $U_c^{-1} = U_c^T$ و $V_c^{-T} = (V_c^T)^T = V_c$، پس

$$X = (V_c \Sigma_c^{-1} U_c^T) B (U_r \Sigma_r U_r^T).$$

اگر فرض کنیم $\hat{B} = U_c^T B U_r$ و $S = diag(\Sigma_c) \times diag(\Sigma_r)$، آن‌گاه $X = \Sigma_c^{-1} \hat{B} \Sigma_r$. در نرم‌افزار متلب X را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

```
>> X = Vc * ( ( Uc' * B * Ur) . / S) * Vr' ;
```



شکل ٦. شفاف‌سازی تصویر به‌کمک الگوریتم SVD

در شکل ٦ با استفاده از روش یادشده، شفاف‌سازی تصویر انجام گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌کارگیری روش SVD در ماتریس‌های بدحالت، نتیجهٔ مطلوبی را ارائه نمی‌دهد. از این‌رو، TSVD را بررسی می‌کنیم.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، استفاده از روش TSVD با برش‌های مناسب می‌تواند به جواب قابل قبولی منجر شود. این برش‌ها به‌کمک عوامل فیلترکننده[1] تعریف می‌شوند. عوامل فیلترکنندهٔ متعددی وجود دارند که از جملهٔ آن‌ها، عامل فیلترکنندهٔ TSVD و عامل فیلترکنندهٔ تیخونف هستند.

تابع ϕ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & i = 1, 2, \dots, k \\ 0 & i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

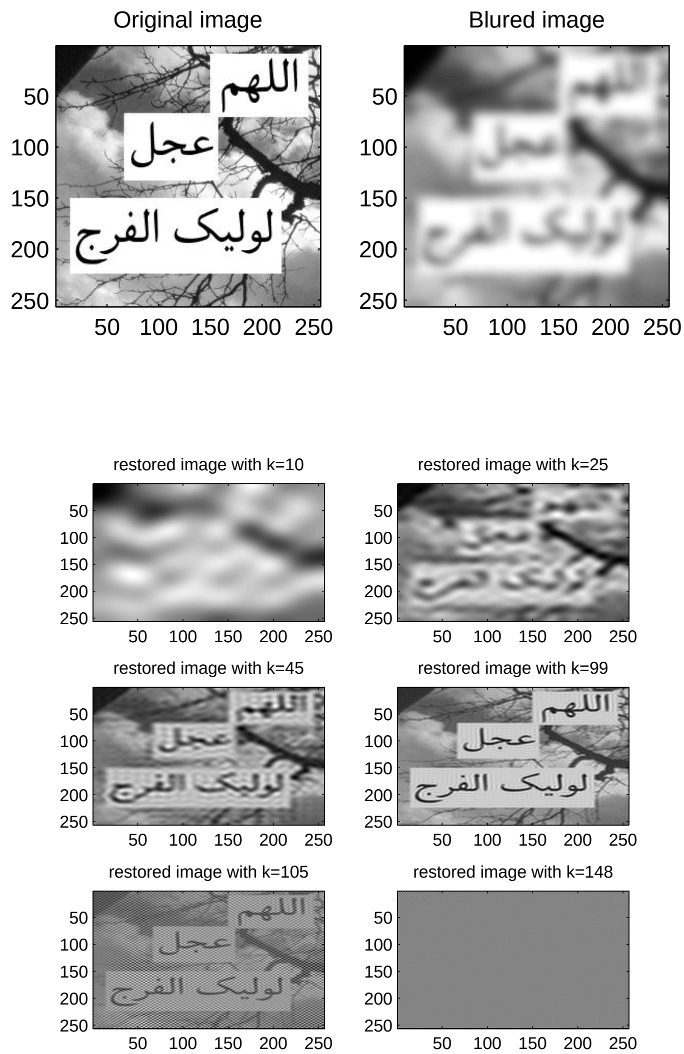
با این عامل فیلترکنندهٔ TSVD، مقدار x_k را به‌جای x به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

که در آن، به k پارامتر برشی می‌گویند و در هر مسأله می‌تواند مقداری مستقل انتخاب شود.

1) Filter factor

در شکل ۷ نتایج برش‌های مختلف از مقادیر تکین، در بازسازی یک تصویر نشان داده شده است. با انتخاب kهای متفاوت، بازسازی‌های مطلوب و نامطلوب مشخص شده است.



شکل ۷. شفاف‌سازی تصویر با استفاده از برش‌های مختلف تجزیهٔ TSVD.

عامل دیگری به نام عامل فیلترکننده (فاکتور منظم‌سازی) تیخونف وجود دارد که به‌صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

در اینجا λ را پارامتر منظم‌سازی گویند. این انتخاب زمانی رخ می‌دهد که در مسائل بدحالت، وجود مقادیر تکین کوچک باعث تولید خطای بزرگ و در نتیجه دورشدن جواب به‌دست آمده از جواب واقعی شده باشد. معمولاً با کمک منظم‌سازی تیخونف که مسالهٔ کمترین مربعات را به‌صورت

$$F_{Tikhonov}(x; \lambda) = \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_2^2.$$

بیان می‌کند، می‌توان اختلاف جواب واقعی از جواب به‌دست آمده را به حداقل رساند. در این مسأله، با انتخاب درست پارامتر λ سعی می‌شود که مقدار $\|Ax - b\|_2$ بدون افزایش بیش از حد x کوچک شود. به عبارت دیگر، مقدارهای $\|Ax - b\|_2$ و $\|x\|_2$ هم‌زمان کوچک می‌شوند. برای بررسی این اثر، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

(الف) $\sigma_i \geq \lambda$:

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_i^2}} = 1 - \frac{\lambda^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^4}{\sigma_i^4} + \ldots$$

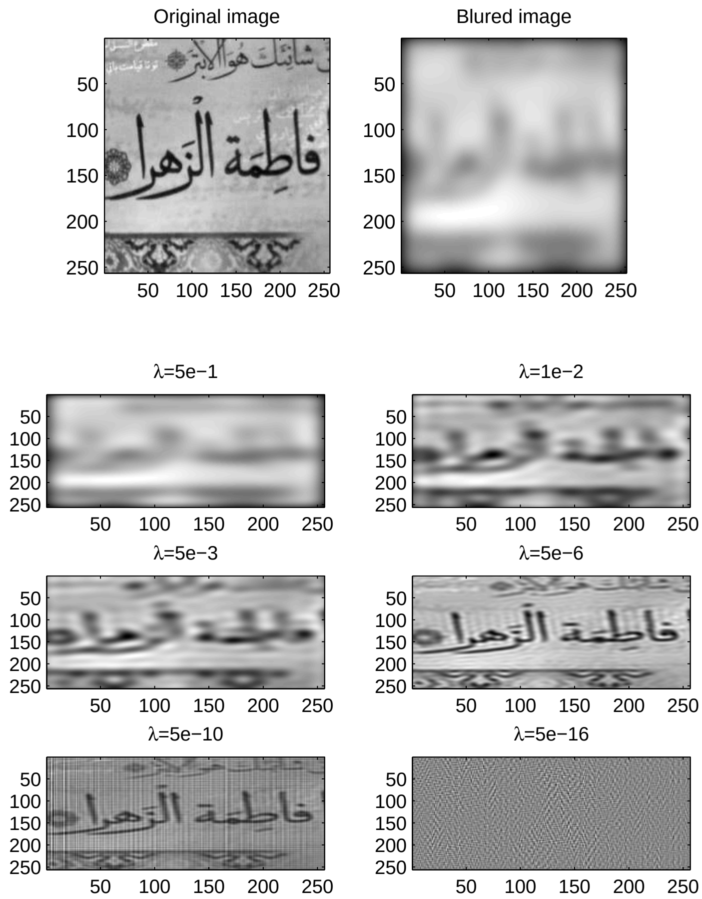
(ب) $\sigma_i \leq \lambda$:

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_i^2}{\lambda^2}} = \frac{\sigma_i^2}{\lambda^2}(1 - \frac{\sigma_i^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^4}{\sigma_i^4} + \ldots)$$

بنابراین، به‌صورت ساده شده، خواهیم داشت

$$\phi_i = \begin{cases} 1 - (\frac{\lambda}{\sigma_i})^2 + O((\frac{\lambda}{\sigma_i}^4)) & \sigma_i \gg \lambda \\ (\frac{\lambda}{\sigma_i})^2 + O((\frac{\lambda}{\sigma_i}^4)) & \sigma_i \ll \lambda \end{cases} \tag{6}$$

که در آن، نماد O مرتبهٔ خطا را نشان می‌دهد. بنابراین اگر $\lambda \in [\sigma_N, \sigma_1]$، آن‌گاه برای i های کوچک، $\phi_i \simeq 1$ و برای i های بزرگ، $\phi_i \simeq \frac{\sigma_i^2}{\lambda^2}$. در شکل ۸ با پارامترهای منظم‌سازی متفاوت از روش تیخونف، میزان اختلاف تصویر اصلی با تصویر بازسازی شده نشان داده شده است. با انتخاب λهای متفاوت، بازسازی‌های مطلوب و نامطلوب مشاهده می‌شوند.



شکل ۸. شفاف‌سازی تصویر با استفاده از پارامترهای مختلف منظم‌سازی تیخونف.

از دو روش می‌توان برای تعیین پارامتر منظم‌سازی استفاده کرد ([۴]، [۸]): **(الف)** منحنی L و **(ب)** ارزیابی تقاطع تعمیم‌یافته (GCV[1]). هرگاه منحنی حاصل از نرم جواب، یعنی $\|x_{filt}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k}(\phi_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i})^2$ را نسبت به نرم باقیمانده یعنی

$$\|b - Ax_{filt}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k}((1-\phi)u_i^T b)^2$$

1) Generalized Cross Validation

رسم کنیم، در گوشه‌ای از منحنی که هر دو نرم کمترین مقدار خود را اختیار می‌کنند، شرایط مطلوب مسأله برقرار خواهد بود.

مسألهٔ کمترین مربعات، که همان مینیمم‌سازی مقدار $\|b-Ax\|^2$ است، بهترین جواب را به‌دست می‌دهد. در تجزیهٔ TSVD از این منحنی، مقدار عدد برشی به‌دست می‌آید. روش GCV بر این پایه بنا شده است که اگرچه بعضی از داده‌ها کنار گذاشته می‌شوند، اما انتخاب درست عدد برشی، باعث می‌شود که اطلاعات مورد نیازی که کنار گذاشته شده‌اند نیز در اختیار قرار گیرد. تابع GCV را می‌توان به‌صورت

$$G(\lambda)=\frac{\|(I_n-AV\phi\Sigma^{-1}U^T)b\|_2^2}{(trace(I_n-AV\phi\Sigma^{-1}U^T))^2} \qquad (۷)$$

بیان کرد که در آن، ϕ از رابطهٔ (۶) به‌دست می‌آید و صورت کسر (۷) عبارت است از

$$\|b-Ax_{filt}\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}((I-\phi_i)u_i^Tb)^2$$

و مخرج کسر نیز عبارت است از

$$\begin{aligned}(trace(I_n-AV\phi\Sigma^{-1}U^T))^2 &= (trace(I_n-U\Sigma V^TV\phi\Sigma^{-1}U^T))^2\\ &= (trace(U(I_n-\phi)U^T)^2=(trace(I_n-\phi))^2=(n-\sum_{i=1}^{n}\phi_i)^2.\end{aligned}$$

مقداری از پارامتر λ که کمترین مقدار روش GCV را به‌دست می‌دهد، همان پارامتر λی روش تیخونف است که با عدد برشی روش TSVD رابطهٔ $\lambda=\frac{1}{k}$ را دارد. در روش تیخونف، $G(\lambda)$ از رابطهٔ

$$G(\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{u_i^Tb}{\sigma_i^2+\lambda^2})^2}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\sigma_i^2+\lambda^2})^2}$$

محاسبه می‌شود. در تجزیهٔ TSVD، می‌توان $G(\lambda)$ را از دستور

$$G(k)=\frac{1}{(n-k)^2}\sum_{i=k+1}^{n}(u_i^Tb)^2 \qquad (۸)$$

مشخص کرد. $G(k)$ به‌ازای $k=1,2,\ldots,n-1$ محاسبه می‌شود و کمترین مقدار آن، جواب بهینه است. روش دیگری نیز به نام شرایط پیکار[1] برای تعیین پارامتر برشی وجود دارد ([۸]).

1) Picard condition

۱۰. مقایسهٔ روش‌ها

در این بخش نتایج عددی و تصویری روش‌های مورد مطالعه را با هم مقایسه می‌کنیم.

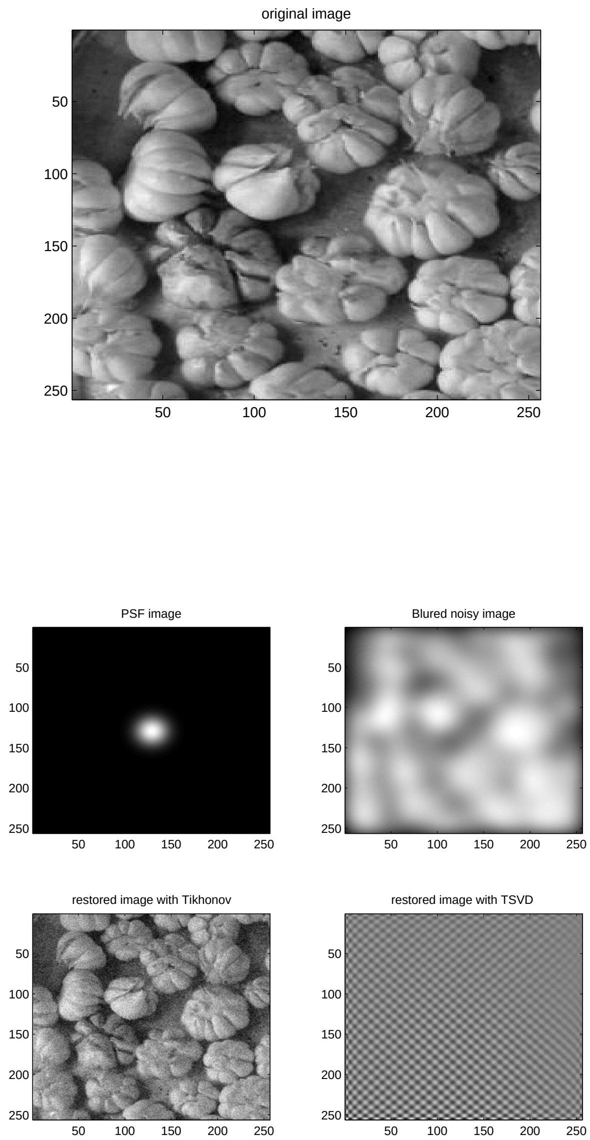
در جدول‌های ۱ و ۲، حاصل $\|X - X_{true}\|$ برای تجزیهٔ TSVD همراه با عامل فیلترکنندهٔ TSVD و تجزیهٔ TSVD همراه با عامل فیلترکنندهٔ تیخونف در شرایط مرزی صفر، انعکاسی و متناوب و در دو حالتی که ماتریس B نویزدار و بدون نویز است، مقایسه شده‌اند. در شکل‌های ۹ و ۱۰ نیز این نتایج آمده است.

	صفر	انعکاسی	تناوبی
روش $TSVD$ و $noise = ۱e - ٦$	۱۰.۷۵۹۲	۳۵.۷۴۳۴	۱۷.۴۰۹۸
منظم‌سازی تیخونف و $noise = ۱e - ٦$	۳.۰۳۵۵	۲.۹۱۷۱	۳.۹۵۴۷

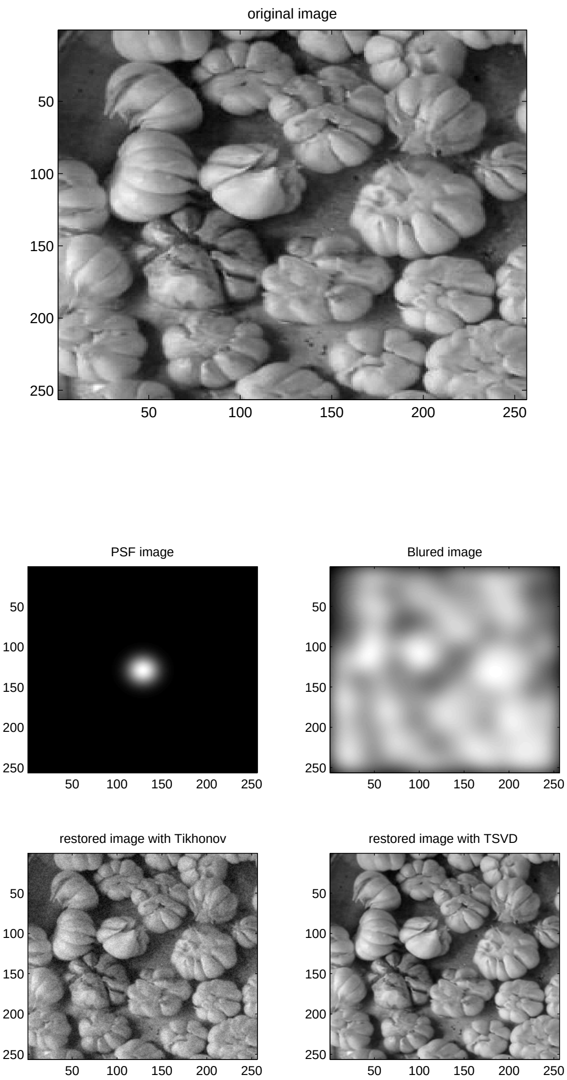
جدول ۱. حاصل $\|X - X_{true}\|$ وقتی نویز به B افزوده شود.

	صفر	انعکاسی	تناوبی
روش $TSVD$	۰.٦٦۱۵	۰.۷۱۲۵	۰.۷۴۸۴
منظم‌سازی تیخونف	۱.۱۱۸۷	۱.۲۱٦۷	۳.۳۵۰٦

جدول ۲. حاصل $\|X - X_{true}\|$ وقتی B نویز نداشته باشد.



شکل ۹. مقایسهٔ روش TSVD و منظم‌سازی تیخونف وقتی نویز وجود دارد.



شکل ۱۰. مقایسهٔ روش TSVD و منظم‌سازی تیخونف وقتی نویز وجود ندارد.

مراجع

[۱] سروری، ریموند، فیزیک عمومی، ترجمهٔ عزیز بهکامی و محمود امامی، انتشارات علوی، ۱۳۶۵، تهران.

[2] Datta, B. N., *Numerical linear algebra and applitions*, U.S.A., International Thomson Publishing Company, 1994.

[3] Golub, G. H. and Van Loan, C. F., *Matrix computations*, Third Edition, Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1996.

[4] Hansen, P. C., Nagy, J. G. and O'leary. D. P., *Debluring image, matrices, spectra, and filtering*, SIAM, Philadelphia, 2006.

[5] Hansen, P. C., *Rank-deficient and discrefe ill-posed problems*, SIAM, Philadelphia, 1998.

[6] Hansen, P. C., *"Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems"*, Numerical Algorithms, 6(1) (1994), 1-35.

[7] Lee, K. P. and Nagy, J. G., "Steepest descent, CG, and iterative regularization of ill-posed problems", *BIT*, **43**(2000), 1003-1117.

[8] MATLAB: http://www. matworks. com.

[9] Nagy, J. G., Palmert, K. and Perrone, L., "Iteratiye methods for image deblurring: a Matlab object oriented approach", *BIT*, **27**(2003), 534-553.

[10] Vogel, C. and Oman, M., *A fast robust algorithm for total variation based reconstraction of noisy images*, SIAM, Philadelphia, 1996.

[11] Zhang, Z., *Inverse image filtering with conjugate gradient*, From: http://www. cs. cornell. edu/ boom /projects. htm., 2002.

مازیار صلاحی

رشت، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی

salahim@guilan.ac.ir