۷) فرض کنید تعدادی سنگ‌ریزه را به n قسمت با وزن‌های $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_n$ تقسیم کرده باشیم. بار دیگر همان سنگ‌ریزه‌ها را به n قسمت با وزن‌های $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_n$ تقسیم می‌کنیم. نشان دهید برای هر $1 \leqslant k \leqslant n$ داریم

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_k \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_k.$$

پاسخ:

می‌دانیم $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = A$. دو حالت را در نظر می‌گیریم

۱) $w_k \leqslant v_k \Rightarrow w_1 + w_2 + \ldots + w_k \leqslant kw_k \leqslant kv_k \leqslant v_1 + v_2 + \ldots + v_k$

۲) $w_k > v_k \Rightarrow w_1 + w_2 + \ldots + w_k = A - (w_{k+1} + \ldots + w_n) \leqslant A - (n-k)w_k$

$\leqslant A - (n-k)v_k \leqslant A - (v_{k+1} + \ldots + v_n) = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$

۸) همه‌ی اعداد حقیقی مانند c را بیابید که برای آنها تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f^{''}(x) > f^{'}(x) + c\ ,\ \ f^{'}(x) > f(x) + c.$$

پاسخ:

۹) گروه G مفروض است به طوری که در G همواره از $ab \neq ba$ نتیجه می‌شود $a^۲ = b^۲$.

الف) ثابت کنید هر زیرگروه G نرمال است.

ب) مثالی از یک گروه غیر آبلی G بیاورید که شرط بالا را داشته باشد.

پاسخ:

فرض کنید H زیرگروهی از G بوده، $h \in H$ و g عضو دلخواهی در G باشد. اگر $ghg^{-۱} = h$ پس $ghg^{-۱} \in H$. در غیر این صورت $ghg^{-۱} \neq h$ یعنی g و h جابجا نمی‌شوند پس $g^۲ = h^۲$ هم‌چنین h و $g^{-۱}$ هم جابجا نمی‌شوند پس $g^{-۲} = h^۲$ پس $g^۲ = g^{-۲}$ و در نتیجه $g^۴ = e$.

به طور مشابه چون g و h جابجا نمی‌شوند، g و $g^{-۱}h$ هم جابه‌جا نمی‌شوند و در نتیجه $g^۲ = (g^{-۱}h)^۲ = g^{-۱}hg^{-۱}h$ پس با ضرب طرفین در $g^۲$ و استفاده از رابطه‌ی $g^۴ = e$ داریم $e = ghg^{-۱}h$ پس $ghg^{-۱} = h^{-۱} \in H$ بنابراین H نرمال است.

هم‌چنین گروه چهارگان‌های همیلتونی $Q_۸ = \{\pm ۱, \pm i, \pm j, \pm k\}$ مثالی غیرآبلی از گروهی است که در شرط‌های مسأله صدق می‌کند.

۱۰) فرض کنید $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد به گونه‌ای که بر زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $[0, 1]$ مقادیر آن حقیقی است. ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) \in \mathbb{R}$.

پاسخ:

(راه‌حل اول):

۱۱) تابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ را یک اَبَر چندجمله‌ای می‌نامیم اگر دنباله‌ی $P_1(x)$، $P_2(x)$، $\dots$ از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح وجود داشته باشد که به ازای هر عدد صحیح مانند x فقط تعدادی متناهی از $P_i(x)$ها ناصفر باشند و $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$.

الف) اگر $P_n(x)=x(x^2-1)(x^2-4)\dots(x^2-n^2)$، نشان دهید $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ یک اَبَرچندجمله‌ای است ولی هیچ چندجمله‌ای مانند $Q(x)$ وجود ندارد که برای هر $x\in\mathbb{Z}$ ، $f(x)=Q(x)$.

ب) ثابت کنید یک اَبَرچندجمله‌ای ناصفر حداکثر تعداد متناهی ریشه در اعداد صحیح دارد.

پاسخ:

الف) چون هر m ریشه‌ی همه $P_n(x)$ها برای $n\geqslant |m|$ می‌باشد پس $P_n(x)$ها شرط مسأله را دارا هستند. حال با برهان خلف فرض کنید یک چندجمله‌ای درجه k مثل $Q(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)=Q(x)$.

فرض کنید n_0 چنان باشد که $k-2<\deg P_n=2n_0+1\leqslant k$ بنابراین

$$\sum_{n_0=n_0+1}^{\infty} P_n(x)=Q(x)-\sum_{n=1}^{n_0} P_n(x).$$

حال سمت راست تساوی یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر k است که حداکثر k ریشه دارد ولی سمت چپ بیش از k ریشه دارد زیرا اعداد $0,1,2,\dots,k$ ریشه‌های سمت چپ تساوی هستند.

ب) فرض کنید اعداد صحیح $a_1,a_2,a_3,\dots$ ریشه‌های ابرچندجمله‌ای $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ باشند. برای هر عدد صحیح a، $P_n(a)$ها از جایی به بعد صفر هستند. بنابراین برای هر دوعدد صحیح a و b عددی مانند N وجود دارد که برای $n>N$، $P_n(a)=P_n(b)=0$. بنابراین چندجمله‌ای $P(x)$ وجود دارد به طوری که $P(a)=f(a)$ و $P(b)=f(b)$.

بنابراین $b-a|f(b)-f(a)$. حال اگر برای $b\in\mathbb{Z}$، $f(b)\neq 0$ چون $f(a_j)=0$ آنگاه برای هر j، $b-a_j|f(b)$ پس $f(b)$ بر بی‌نهایت عدد بخش‌پذیر است که این تناقض است.

۱۲) الف) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی، یکدار و متناهی باشد که بیش از $\frac{3}{4}$ اعضای آن خودتوان هستند. ثابت کنید همه‌ی عناصر R خودتوان هستند.

ب) ثابت کنید برای هر k، حلقه‌ای متناهی با بیش از k عضو وجود دارد که دقیقاً $\frac{3}{4}$ اعضای آن خودتوان هستند.

پاسخ: