پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی اول ۸۸/۲/۱۶

---

۱) فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. ثابت کنید اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده از X مانند K، مجموعه‌ی $A \cap K$ بسته باشد، آنگاه A بسته است.

پاسخ:

به برهان خلف فرض کنیم A بسته نباشد. پس دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ در A موجود است که به نقطه‌ای مانند $x \notin A$ همگراست. مجموعه‌ی $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان نشان داد که این مجموعه فشرده است. بنابراین با توجه به فرض مسأله، می‌توان گفت که $A \cap K$؛ یعنی، $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ بسته است. حال چون x یک نقطه‌ی چسبیدگی برای مجموعه‌ی اخیر است، نتیجه می‌گیریم که $x \in A \cap K \subseteq A$ که تناقض است.

پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی اول ۸۸/۲/۱۶

---

۲) گروه G مفروض است. ثابت کنید موارد زیر معادل هستند:

الف. هر زیر گروه G نرمال است.

ب. برای هر $a, b \in G$ عدد صحیح m وجود دارد که $(ab)^m = ba$.

پاسخ:

(ب $\longrightarrow$ الف) فرض کنید $a, b \in G$. از آنجا که $< ab >$ (زیرگروه دوری تولید شده توسط ab) در G نرمال است پس $ba = b(ab)b^{-1} \in < ab >$، یعنی عدد صحیح m وجود دارد که $(ab)^m = ba$.
(الف $\longrightarrow$ ب) فرض کنید H زیرگروه دلخواهی از G بوده، $h \in H$ و $g \in G$. طبق ب، عدد صحیح m وجود دارد که $ghg^{-1} = (g^{-1}gh)^m = h^m \in H$، پس H نرمال است.

پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی اول ۸۸/۲/۱۶

---

۳) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، $\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)$ بر $n!$ بخش پذیر است.

پاسخ:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)=\prod_{k=0}^{n-1}2^k(2^{n-k}-1)=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}(2^k-1) \qquad (*)$$

برای اثبات کافیست نشان دهیم برای هر عدد اول $p\leq n$ توان p در تجزیه $n!$ از توان p در تجزیهٔ $(*)$ کمتر است. برای $n=1,2$ حکم واضح است فرض کنید $n\geq 3$، اگر $p=2$، توان ۲ در $n!$ برابر است با

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{2^k}=n\leq\frac{n(n-1)}{2}$$

اگر $p>2$، توان p در تجزیه $n!$ برابر است با $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$. برای تخمین توان p در $(*)$ طبق قضیهٔ فرما، $2^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$. همچنین $2^{t(p-1)}\overset{p}{\equiv}1$. تعداد tهایی که به ازای آنها $t(p-1)\leq n$ برابر است با $\left[\frac{n}{p-1}\right]$. بنابراین حداقل $\left[\frac{n}{p-1}\right]$ تا از (2^k-1)ها که در $(*)$ ظاهر شده است بر p بخش پذیر هستند. پس توان p در $(*)$ بزرگتر یا مساوی $\left[\frac{n}{p-1}\right]$ است اما

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{p^k}\leq\frac{n}{p-1}$$

و چون سمت چپ یک عدد صحیح است پس از $\left[\frac{n}{p-1}\right]$ نیز کمتر یا مساوی است و این حکم را ثابت می‌کند.

راه حل دوم: تعداد ماتریس‌های وارون پذیر $n\times n$ روی $\mathbb{Z}_2$ برابر است با $\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)$. زیرا سطر اول 2^n-1 حالت دارد، سطر دوم که مستقل از سطر اول باید باشد 2^n-2^1 حالت و به همین ترتیب سطر $(k+1)$ام که ترکیب خطی سطرهای اول تا kام نیست (2^n-2^k) حالت می تواند نداشته باشد. حال تعداد اعضای ماتریس‌های جایگشتی یعنی آنهایی که در هر سطر و ستون دقیقاً یک ۱ و $n-1$ صفر دارند $n!$ است. اما ماتریس‌های جایگشتی تشکیل یک زیرگروه از ماتریس‌های وارون‌پذیر می‌دهند و طبق قضیه لاگرانژ حکم ثابت است.

پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی اول ۸۸/۲/۱۶

---

۴) در حلقه یکدار R هر عضو برابر با حاصلضرب تعدادی متناهی عضو خودتوان است. ثابت کنید R حلقه‌ای جابجایی است.

پاسخ:

فرض کنیم x عضو پوچتوانی در R باشد. اعضای خودتوان $e_1, e_2, \cdots, e_n$ را چنان می‌گیریم که $1 - x = e_1 e_2 \cdots e_n$. پس $(1 - e_1)(1 - x) = 0$. اما $1 - x$ معکوس‌پذیر است و در نتیجه $e_1 = 1$. بنابراین $1 - x = e_2 \cdots e_n$ و با تکرار استدلال قبل نهایتاً نتیجه می‌شود $e_2 = \cdots = e_n = 1$. پس $1 - x = 1$ و در نتیجه $x = 0$؛ یعنی R عضو پوچتوانی به جز صفر ندارد. حال اگر e خود توان باشد، آنگاه برای هر x، $(ex - exe)^2 = 0$ و از این رو $ex = exe$. به طور مشابه $xe = exe$ و در نتیجه $ex = xe$؛ یعنی، اعضای خودتوان در مرکز R قرار دارند و چون هر عضو حاصلضرب تعدادی عضو خودتوان است، پس R جابجایی است.

پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی اول ۸۸/۲/۱۶

---

۵) فرض کنید $A \subseteq \mathbb{C}$ بسته و شمارا باشد. ثابت کنید اگر تابع تحلیلی $f : \mathbb{C}\backslash A \to \mathbb{C}$ کران‌دار باشد، آن گاه f برابر مقداری ثابت است.

(چنان‌چه برای حالت خاص $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ به سؤال پاسخ دهید ۵۰٪ نمره را می‌گیرید.)

پاسخ:

فرض کنید M یک کران بالای $|f|$ باشد. گردایه‌ی S را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$S = \{(g,B) \mid g|_{\mathbb{C}\backslash A} = f\ ,\ B \subseteq A \text{ بسته } ،\ |g| \leq M \text{ و } g : \mathbb{C}\backslash B \to \mathbb{C} \text{ تحلیلی است}\}$$

این مجموعه را می‌توان با رابطه‌ی ترتیب زیر به طور جزئی مرتب کرد.

$$(g,B) \trianglelefteq (h,C) \iff (\text{است.} \ g \ \text{توسعه‌ی} \ h \ \text{و} \ C \subseteq B)$$

نشان می‌دهیم که $(S, \trianglelefteq)$ شرایط لم زرن را دارد. فرض کنید $\{(g_\alpha, B_\alpha) | \alpha \in I\}$ زنجیری در S باشد. اگر B^* را برابر $\cap B_\alpha$ بگیریم این مجموعه بسته و مشمول در A است. تابع g^* هم روی B^* به طور طبیعی تعریف می‌شود؛ اگر $z \in B^*$، آن‌گاه $\alpha \in I$ وجود دارد که $z \in B_\alpha$. $g^*(z)$ را برابر $g_\alpha(z)$ می‌گیریم و با توجه به زنجیر بودن مجموعه‌ی انتخاب‌شده، خوش‌تعریفی تضمین شده است. پس (g^*, B^*) یک کران بالا برای زنجیر مورد بحث است. به‌علاوه $(f, A) \in S$ پس S ناتهی است.

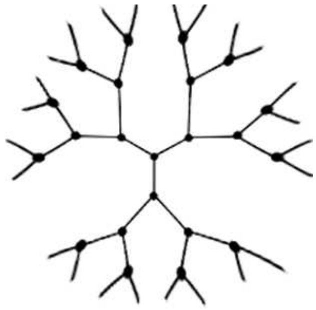
پس طبق لم زرن S یک عضو ماکزیمال دارد. اگر (h, C) ماکزیمال S باشد، C باید تهی باشد زیرا در غیر این صورت C بسته‌ای شمارا و ناتهی است که لزوماً شامل یک نقطه‌ی تنهاست. چون h کران‌دار است تکینگی آن در این نقطه رفع‌شدنی است و این با ماکزیمال بودن (h, C) در تضاد است.
پس $C = \phi$ است و این یعنی h روی کل $\mathbb{C}$ تعریف شده و کران دار است. طبق قضیهٔ لیوویل h ثابت است و لذا f نیز ثابت است.

پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی اول ۸۸/۲/۱۶

---

۶) در شبکه‌ی نامتناهی زیر، هر گره به سه گره‌ی دیگر متصل است و هیچ دوری وجود ندارد. عدد حقیقی λ داده شده است. می‌خواهیم به هر گره از شبکه یک عدد حقیقی اکیداً مثبت نسبت دهیم به‌طوری که حاصل جمع اعداد گره‌های مجاور هر گره، λ برابر عدد آن گره شود. به ازای چه مقادیری از λ این کار ممکن است؟



پاسخ:

ابتدا نشان می‌دهیم که λ جوابی از مساله است اگر و تنها اگر همه اعضای دنباله $\{s_n\}_{\circ}^{\infty}$ که از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آیند مثبت باشند:

$$s_{n+۱} = \lambda s_n - ۲s_{n-۱} \quad s_{\circ} = ۱, \quad s_۱ = \lambda \quad (*)$$

برای اثبات ادعا، تابعی که به هر گره عددی نسبت می‌دهد را با f و یکی از گره‌های شبکه را به دلخواه انتخاب کرده و o می‌نامیم. به‌علاوه با ضرب کردن f در عددی مثبت، فرض می‌کنیم $f(o) = ۱$. اکنون اگرقرار دهیم: $s_n = \sum_{d(x,o)=n} f(x)$، به راحتی می‌توان دید که $\{s_n\}$ دنباله‌ای مثبت است که در $(*)$ صدق می‌کند.

بر عکس اگر $\{s_n\}$ جوابی مثبت برای $(*)$ باشد کافی است قرار دهیم $f(o) = ۱$ و اگر $d(x,o) = n > \circ$، $f(x) = \dfrac{s_n}{۳ \times ۲^{n-۱}}$. حال ثابت می‌کنیم که جواب $(*)$ مثبت است اگر و تنها اگر $\lambda \geq \sqrt{۸}$. قرار دهید $u_n = \dfrac{s_n}{\sqrt{۲}^n}$. در این صورت اگر $\mu = \dfrac{\lambda}{\sqrt{۲}}$، خواهیم داشت:

$$u_{n+۱} = \mu u_n - u_{n-۱} \quad u_{\circ} = ۱, u_۱ = \mu \quad (**).$$

اکنون به‌راحتی با استقرا ثابت می‌شود که اگر $\mu \geq ۲$، $\{u_n\}$ دنباله‌ای صعودی و بنابراین مثبت خواهد شد. و از طرف دیگر اگر $\{u_n\}$ دنباله‌ای با اعضای مثبت باشد قرار می‌دهیم $t_n = \dfrac{u_{n+۱}}{u_n}$، در این صورت اولاً $\circ < t_n < \mu$ و ثانیاً $\dfrac{۱}{t_n} + t_{n+۱} = \mu$ و بنابراین: $t_{n+۱} - t_n = \dfrac{۱}{t_{n-۱}} - \dfrac{۱}{t_n}$. پس با استقرا $\{t_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و کران‌دار است پس حدی چون t دارد. اما در این صورت $\mu = t + \dfrac{۱}{t}$، پس $\mu \geq ۲$ و این یعنی $\lambda \geq \sqrt{۸}$.