سؤالات نوبت اول سی و سومین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی اول ۸۸/۲/۱۶ — مدت امتحان : ۳/۵ ساعت

۱) فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. ثابت کنید اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده از X مانند K، مجموعه‌ی $A\cap K$ بسته باشد، آنگاه A بسته است.

۲) گروه G مفروض است. ثابت کنید موارد زیر معادل هستند:

الف. هر زیر گروه G نرمال است.

ب. برای هر $a,b\in G$ عدد صحیح m وجود دارد که $(ab)^m=ba$.

۳) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، $\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)$ بر $n!$ بخش پذیر است.

۴) در حلقه یکدار R هر عضو برابر است با حاصلضرب تعدادی عضو خودتوان. ثابت کنید R حلقه‌ای جابجایی است.

۵) فرض کنید $A\subseteq\mathbb{C}$ بسته و شمارا باشد. ثابت کنید اگر تابع تحلیلی $f:\mathbb{C}\backslash A\to\mathbb{C}$ کران‌دار باشد، آن گاه f برابر مقداری ثابت است.

(چنان‌چه برای حالت خاص $A=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$ به سؤال پاسخ دهید ۵۰٪ نمره را می‌گیرید.)

۶) در شبکه‌ی نامتناهی زیر، هر گره به سه گره‌ی دیگر متصل است و هیچ دوری وجود ندارد. عدد حقیقی λ داده شده است. می‌خواهیم به هر گره از شبکه یک عدد حقیقی اکیداً مثبت نسبت دهیم به‌طوری که حاصل جمع اعداد گره‌های مجاور هر گره، λ برابر عدد آن گره شود. به ازای چه مقادیری از λ این کار ممکن است؟