آزمــون نــوبت دوم

ســی و ششمین مســـابقهٔ

ریاضی دانشـــجویی کشور

جلسهٔ دوم ۹۱/۲/۲۷

مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

انجمن ریاضی ایران


---

۷) فرض کنید $n$ عددی طبیعی و $A_1$، $A_2$، ... و $A_n$ مجموعه‌هایی دلخواه باشند. ماتریس $X=[x_{ij}]_{n\times n}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $x_{ij}=\begin{cases} 1 & A_i \subsetneq A_j \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$. نشان دهید $X^n=0$.

۸) فرض کنید $p$ عددی اول باشد. قرار دهید

$$G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}_p\right\}$$

می‌دانیم که $G$ به همراه عمل ضرب ماتریس‌ها (به پیمانهٔ $p$) یک گروه از مرتبهٔ $p^5$ است. اعضای $G'$ (زیرگروه مشتق $G$) را مشخص کنید.

۹) فرض کنید $X$ یک فضای متریک و $f:X\to\mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد. می‌گوییم $f$ در نقطهٔ $x\in X$ بیشین (maximal) است اگر برای هر $y\in X$ که $f(y)$ مؤلفه به مؤلفه بزرگ‌تر یا مساوی $f(x)$ است، داشته باشیم $f(x)=f(y)$.

الف. ثابت کنید اگر $X$ فشرده و ناتهی باشد مجموعهٔ $M_f=\{x\in X|\ \text{در } x \text{ بیشین است } f\}$ ناتهی است.

ب. فضای متریک فشرده‌ای مانند $X$ و تابعی پیوسته مانند $f:X\to\mathbb{R}^2$ مثال بزنید که $M_f$ فشرده نباشد.

۱۰) فرض کنید $U\subseteq\mathbb{C}$ باز و همبند و $f,g:U\to\mathbb{C}$ توابعی تحلیلی باشند که $|f|+|g|$ ثابت است. ثابت کنید $f$ و $g$ توابعی ثابت هستند.

۱۱) رأس‌های چهاروجهی $P$ روی سطح کره قرار گرفته‌اند. نشان دهید اگر بیش از $\frac{3}{4}$ از سطح کره رنگ شده باشد، دورانی از $P$ وجود دارد که همهٔ رأس‌های آن در قسمت رنگ شده قرار بگیرند.

۱۲) عمل دوتایی $\cdot$ روی مجموعهٔ $G$ تعریف شده است. هم‌چنین تابع $H:G\to G$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $a,b,c,d,f\in G$ از تساوی $(a\cdot b)\cdot c=(a\cdot d)\cdot f$ نتیجه می‌شود $b=d\cdot(f\cdot H(c))$، ثابت کنید $(G,\cdot)$ یک گروه است.

موفق باشید.