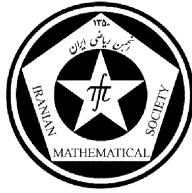




آزمون نوبت دوم
سی و ششمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسة دوم ۹۱/۲/۲۷
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت



دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

انجمن ریاضی ایران

۷) فرض کنید n عددی طبیعی و A_1, A_2, \dots, A_n مجموعه‌هایی دلخواه باشند. ماتریس X را $X = [x_{ij}]_{n \times n}$ چنین تعریف می‌کنیم: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & A_i \subseteq A_j \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$.

۸) فرض کنید p عددی اول باشد. قرار دهید

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

می‌دانیم که G به همراه عیمل ضرب ماتریس‌ها (به پیمانه p) یک گروه از مرتبه p^5 است. اعضای G' (زیرگروه مشتق G) را مشخص کنید.

۹) فرض کنید X یک فضای متریک و $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد. می‌گوییم f در نقطه $x \in X$ بیشین (maximal) است اگر برای هر $y \in X$ که $f(y)$ مؤلفه به مؤلفه بزرگ‌تر یا مساوی $f(x)$ است، داشته باشیم $f(x) = f(y)$.

الف. ثابت کنید اگر X فشرده و ناتهی باشد مجموعه $\{f(x) \mid x \in X\}$ در ناتهی است.

ب. فضای متریک فشرده‌ای مانند X و تابعی پیوسته مانند $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ مثال بزنید که M_f فشرده نباشد.

۱۰) فرض کنید $\mathbb{C} \subseteq U$ باز و همبند و $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ توابعی تحلیلی باشند که $|f| + |g|$ ثابت است. ثابت کنید f و g توابعی ثابت هستند.

۱۱) رأس‌های چهاروجهی P روی سطح کره قرار گرفته‌اند. نشان دهید اگر بیش از $\frac{3}{4}$ از سطح کره رنگ شده باشد، دورانی از P وجود دارد که همه رأس‌های آن در قسمت رنگ شده قرار بگیرند.

۱۲) عمل دوتایی \cdot روی مجموعه G تعریف شده است. همچنین تابع $H : G \rightarrow G$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $a, b, c, d, f \in G$ از تساوی $f \cdot (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot d) \cdot (f \cdot H(c))$ نتیجه می‌شود ($f \cdot H(c)$ یک گروه است).

موفق باشید.