۷) فرض کنید n عددی طبیعی و $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n مجموعه‌هایی دلخواه باشند. ماتریس $X = [x_{ij}]_{n\times n}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $x_{ij} = \begin{cases} ۱ & A_i \subsetneqq A_j \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$. نشان دهید $X^n = ۰$.

پاسخ اول:

توجه کنید که درایهٔ ijام از ماتریس X^k برابر است با:

$$\sum_{i_۱, i_۲, \cdots, i_{k-۱}} x_{ii_۱} x_{i_۱ i_۲} \dots x_{i_{k-۱} j}$$

و تنها جملات ناصفر عبارت بالا زمانی اتفاق می‌افتد که

$$A_i \subsetneqq A_{i_۱} \subsetneqq \cdots \subsetneqq A_{i_{k-۱}} \subsetneqq A_j$$

بنابراین این عدد برابر با تعداد زنجیرهای به طول $k+۱$ با شروع از A_i و پایان در A_j است. حال از آن جایی که در بین n مجموعه زنجیری به طول $n+۱$ می‌تواند وجود داشته باشد پس همهٔ درایه‌های X^n صفراند.

پاسخ دوم:

نخست توجه کنید که اگر A_iها به ترتیب اندازه مرتب شده باشند یعنی اگر

$$|A_۱| \leq |A_۲| \leq \cdots \leq |A_n|$$

در این صورت برای هر $i \geq j$ قطعاً $A_i \subsetneqq A_j$ رخ نخواهد داد پس تنها درایه‌های بالاتر از قطر اصلی X می‌توانند ناصفر باشند و در این حالت روشن است که $X^n = ۰$.

حال برای حالت دلخواه، فرض کنید $A'_۱, \cdots, A'_n$ همان $A_۱, \cdots, A_n$ باشند که به ترتیب اندازه مرتب شده‌اند. بنابراین اگر X' ماتریس متناظر با A'_iها باشد $X'^n = ۰$ از طرفی اگر π جایگشتی باشد که A_iها را به A'_iها تبدیل می‌کند و P ماتریس جایگشتی نظیر π، روشن است که $X = PX'P^{-۱}$ و بنابراین

$$X^n = (PX'P^{-۱})^n = PX'^n P^{-۱} = ۰$$

۸) فرض کنید p عددی اول باشد. قرار دهید

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

می‌دانیم که G به همراه عمل ضرب ماتریس‌ها (به پیمانهٔ p) یک گروه از مرتبهٔ p^5 است. اعضای G' (زیرگروه مشتق G) را مشخص کنید.

پاسخ:

توجه کنید تابع $\varphi : G \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ با ضابطهٔ

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (a, b, d, e)$$

یک همریختی پوشا است و

$$\ker \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

چون $\frac{G}{\ker \varphi}$ با $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ یکریخت است پس $\frac{G}{\ker \varphi}$ آبلی بوده و در نتیجه $G' \subseteq \ker \varphi$. اما $\ker \varphi$ یک زیرگروه p عضوی است، پس یا $G' = \{e\}$ (که امکان ندارد چون G غیرآبلی است) و یا $G' = \ker \varphi$. پس نهایتاً نتیجه می‌شود

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

۹) فرض کنید X یک فضای متریک و $f: X \to \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد. می‌گوییم f در نقطهٔ $x \in X$ بیشین (maximal) است اگر برای هر $y \in X$ که $f(y)$ مؤلفه به مؤلفه بزرگ‌تر یا مساوی $f(x)$ است، داشته باشیم $f(x) = f(y)$.

الف. ثابت کنید اگر X فشرده و ناتهی باشد مجموعهٔ $M_f = \{x \in X | \text{بیشین است } x \text{ در } f\}$ ناتهی است.

ب. فضای متریک فشرده‌ای مانند X و تابعی پیوسته مانند $f: X \to \mathbb{R}^2$ مثال بزنید که M_f فشرده نباشد.

پاسخ: الف. تابع $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را به شکل $g(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ تعریف می‌کنیم. g به وضوح پیوسته است پس $g \circ f$ به‌عنوان تابعی از X به $\mathbb{R}$ نیز پیوسته است و چون X فشرده است بیش‌ترین مقدار خود را می‌گیرد. یعنی وجود دارد $x \in X$ که برای هر $y \in X$، $(g \circ f)(y) \leq (g \circ f)(x)$. نشان می‌دهیم که $x \in M_f$ است. اگر برای یک $y \in X$، $f(y)$ مؤلفه به مؤلفه بزرگ‌تر یا مساوی $f(x)$ باشد با توجه به این که $g(f(y)) \leq g(f(x))$ پس نمی‌تواند هیچ‌کدام از مؤلفه‌های $f(y)$ اکیداً از مؤلفهٔ متناظرش در $f(x)$ بیش‌تر باشد، لذا $f(y) = f(x)$.

ب. فضای X را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ می‌گیریم که به شکل زیر تعریف شده است:

$$X = \{0\} \times [0, 1] \cup \{(x_1, -x) | x \in [0, 1]\}.$$

تابع $f: X \to \mathbb{R}^2$ را هم نشاندن طبیعی می‌گیریم، یعنی $f(x, y) = (x, y)$. نشان می‌دهیم

$$M_f = \{(0, 1)\} \cup \{(x, -x) | x \in (0, 1]\}$$

که در نتیجه چون بسته نیست، فشرده نیست. اثبات ادعای اخیر با توجه به شکل X روشن است؛ بیان دقیق آن چنین است: اگر $(0, y) \in X$ بخواهد عضو M_f باشد نباید نقطه‌ای در $f(X)$ موجود باشد که در هر دو مؤلفه بزرگ‌تر یا مساوی و در یک مؤلفه بزرگ‌تر از $(0, y)$ باشد. این دقیقاً در حالتی رخ می‌دهد که $y = 1$. اگر $(x, -x) \in X$ بخواهد عضو M_f باشد نیز همان وضعیت را باید داشته باشد که با توجه به شیب منفی این پاره‌خطی، همهٔ این نقاط عضو M_f هستند مگر $(0, 0)$ که به دلیل وجود $(0, 1)$ در X، عضو M_f نیست.

۱۰) فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}$ باز و همبند و $f, g : U \to \mathbb{C}$ توابعی تحلیلی باشند که $|f| + |g|$ ثابت است. ثابت کنید f و g توابعی ثابت هستند.

پاسخ:

مسأله را در حالت کلی‌تری ثابت می‌کنیم. فرض کنید $f_1, f_2, \ldots, f_n$ توابعی تحلیلی از V به $\mathbb{C}$ باشند که $|f_1| + |f_2| + \cdots + |f_n|$ ثابت باشد. نشان می‌دهیم همهٔ f_k ها ثابت هستند.

فرض کنید $z_0 \in U$ نقطه‌ای دلخواه باشد. به ازای هر k، عدد مختلط α_k را طوری انتخاب می‌کنیم که $\alpha_k f_k(z_0)$ عدد حقیقی نامنفی باشد و $|\alpha_k| = 1$؛ اگر $f_k(z_0) = 0$ می‌توانیم α_k را برابر ۱ انتخاب کنیم و در غیر این صورت $\alpha_k = \frac{|f_k(z_0)|}{f_k(z_0)}$.

تعریف می‌کنیم $g_k(z) = \alpha_k f_k(z)$. واضح است که شرایط مسأله برای g_1، g_2، $\cdots$ و g_n هم برقرار است و به علاوه $g_k(z_0)$ها اعداد حقیقی نامنفی هستند. لذا

$$\begin{aligned} |g_1(z) + \cdots + g_n(z)| &\leq |g_1(z)| + \cdots + g_n(z)| = |g_1(z_0)| + \cdots + |g_n(z_0)| \\ &= g_1(z_0) + \cdots + g_n(z_0) = |g_1(z_0) + \cdots + g_n(z_0)|. \end{aligned}$$

پس تابع $G(z) = g_1(z) + \cdots + g_n(z)$، که بر U تحلیلی است، ماکسیمم نرم خود را در نقطهٔ z_0 می‌گیرد و در نتیجه طبق اصل ماکسیمم G باید ثابت باشد و این مقدار ثابت برابر $|g_1(z)| + \cdots + |g_n(z)|$ است. اکنون به این توجه کنید که تنها در صورتی جمع نرم n عدد مختلط با نرم جمع آن‌ها برابر است که به عنوان بردار در صفحه هم‌جهت و هم راستا باشند. پس $\frac{g_k}{g_1}$ (در نقاطی که g_1 ناصفر است) یک عدد حقیقی نامنفی است و با توجه به تحلیلی بودن $\frac{g_k}{g_1}$ باید مقدار آن ثابت باشد در نتیجه: $g_k = \beta_k g_1$ که $\beta_k \in \mathbb{R}^+$. با توجه به این که $G(z) = g_1(z)(1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)$ تابع ثابت است و $1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n \geq 1$. پس g_1 تابع ثابت است و این نتیجه می‌دهد که g_kها و در نتیجه f_kها توابع ثابت هستند.

۱۱) رأس‌های چهاروجهی P روی سطح کره قرار گرفته‌اند. نشان دهید اگر بیش از $\frac{۳}{۴}$ از سطح کره رنگ شده باشد، دورانی از P وجود دارد که همهٔ رأس‌های آن در قسمت رنگ شده قرار بگیرند.

پاسخ:

فرض کنید Q چهار وجهی باشد که از یک دوران تصادفی چهار وجهی P به دست آمده باشد. رأس‌های Q را با اعداد ۱ تا ۴ شماره‌گذاری و پیشامدهای A_i، $i = ۱,\dots,۴$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

رأس iام Q در قسمت رنگ شده قرار بگیرد : A_i

از آنجایی که هر کدام از رأس‌های Q به شکل تصادفی و با توزیع یکنواخت روی سطح کره قرار گرفته است، بنابراین $\mathbb{P}(A_i) > \frac{۳}{۴}$.

حال توجه کنید که:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcap_{i=۱}^{۴} A_i) &= ۱ - \mathbb{P}(\bigcup_{i=۱}^{۴} A_i^c)\\ &\geq ۱ - (\sum_{i=۱}^{۴} \mathbb{P}(A_i^c))\\ &\geq ۱ - \sum_{i=۱}^{۴}(۱ - \mathbb{P}(A_i)) > ۰\end{aligned}$$

بنابراین احتمال این که هر چهار رأس در قسمت رنگی قرار بگیرند اکیداً مثبت است پس چنین حالتی وجود دارد!

۱۲) عمل دوتایی $\cdot$ روی مجموعهٔ G تعریف شده است. هم‌چنین تابع $H : G \to G$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $a, b, c, d, f \in G$ از تساوی $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot d) \cdot f$ نتیجه می‌شود $b = d \cdot (f \cdot H(c))$، ثابت کنید $(G, \cdot)$ یک گروه است.

پاسخ:

از آنجا که $(ab)c = (ab)c$، پس $b = b(cH(c))$ (۱). حال طبق (۱) داریم

$$(a(bH(b)))c = (a(dH(d)))c$$

و در نتیجه:

$$bH(b) = (dH(d))(cH(c)) \overset{(۱)}{=} dH(d) \qquad (۲)$$

پس عبارت $cH(c)$ مستقل از انتخاب c است و طبق (۱) اگر قرار دهیم $e = cH(c)$، آنگاه e یک عضو همانی راست برای G است. حال نشان می‌دهیم قانون حذف چپ در G برقرار است: اگر $ab = ad$ آنگاه $(ab)c = (ab)c$، و در نتیجه $b = d(cH(c)) = d$.

اکنون از آنجا که $(ae)e = (ae)e$، پس $e = e(eH(e))$ و در نتیجه $eH(e) = e(eH(e))$ که پس از حذف e از سمت چپ به دست می‌آید $H(e) = eH(e) = e$. بنابراین $H(e) = e$ (۳). حال توجه کنیم که رابطهٔ $(ab)e = (ab)b$ نتیجه می‌دهد:

$$b = e(bH(e)) \overset{(۳)}{=} e(be) = eb$$

پس e عضو همانی دو طرفه G است.

چون e همانی دو طرفه است، پس برای هر c و d داریم $(ed)H(d) = (ec)H(c)$ که نتیجه می‌دهد $c = d(H(d)H(H(c)))$ و با جایگذاری $d = e$ در رابطهٔ قبل به دست می‌آید $H(H(c)) = c$ (۴). پس $c = d(H(d)c)$. یعنی ثابت کردیم که برای هر a و b معادلهٔ $a = bx$ در G دارای جواب $x = H(b)a$ است.

اکنون آماده هستیم که شرکت پذیر بودن G را ثابت کنیم: برای این کار فرض می‌کنیم a، b و c عضوهای دلخواهی از G باشند و طبق آنچه گفته شد x را چنان می‌گیریم که

$$(a(bc))x = (ab)c$$

پس $bc = b(cH(x))$ و با استفاده از قانون حذف چپ به دست می‌آید $H(x) = e$ و بنابر (۴) نهایتاً به دست می‌آید $x = H(H(x)) = H(e) = e$. پس $x = e$ و در نتیجه $a(bc) = (ab)c$.

از طرف دیگر برای هر a داریم $aH(a) = e$. پس هر عضو G معکوس راست دارد و به طور مشابه می‌توان نشان داد $H(a)a = e$. بنابراین هر عضو G دارای معکوس دو طرفه است و در نتیجه $(G, \cdot)$ یک گروه است.