انجمن ریاضی ایران

آزمــون نــوبت اول
ســی و ششمین مســـابقهٔ
ریاضی دانشـــجویی کشور
جلسهٔ اول ۹۱/۲/۲۶
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

۱) همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی مانند $A$ را مشخص کنید که در شرط زیر صدق کنند:

اگر $v$ بردار ستونی دلخواه باشد که تمام درایه‌های آن ناصفر است، آنگاه همهٔ درایه‌های $Av$ نیز ناصفر باشد.

## پاسخ:

نشان می‌دهیم ماتریس $A$ در شرط مسأله صدق می‌کند اگر و تنها اگر در هر سطر $A$ دقیقاً یک درایهٔ غیر صفر موجود باشد.

اگر در هر سطر $A$ دقیقاً یک درایه غیر صفر باشد آنگاه به وضوح $A$ در شرط مسأله صدق می‌کند. برعکس، فرض کنید $A$ ماتریسی باشد که در شرط مسأله صدق کند و سطر اول آن را در نظر بگیرید. اگر همهٔ درایه‌های این سطر صفر باشند، آنگاه برای هر $v$، درایهٔ اول $Av$ نیز صفر است. بنابراین در سطر اول $A$ باید حداقل یک درایهٔ غیر صفر موجود باشد. از طرف دیگر اگر در سطر اول $A$ بیش از یک درایه، مثلاً $a_{1i}$ و $a_{1j}$ ، غیر صفر باشند، اعداد $r \neq 0$ و $s \neq 0$ را چنان می‌گیریم که

$$a_{1i}r + a_{1j}s = \sum_{t \neq i,j} a_{1t}$$

و $v$ را نیز برداری ستونی می‌گیریم که درایهٔ $i$ام آن $r$، درایهٔ $j$ام آن $s$ و مابقی درایه‌های آن $-1$ هستند. در این صورت همهٔ درایه‌های $v$ غیر صفر هستند، اما درایهٔ اول در $Av$ صفر است. پس اگر $A$ در شرایط مسأله صدق کند، آنگاه در سطر اول $A$ دقیقاً یک درایهٔ غیرصفر وجود دارد و استدلال مشابه نشان می‌دهد که در هر سطر دیگر $A$ نیز دقیقاً یک درایهٔ غیر صفر وجود دارد.

۲) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ باز $U$ شامل $x$ وجود داشته باشد که تحدید $f$ به $U$ یک چندجمله‌ای است. ثابت کنید $f$ یک چندجمله‌ای است.

## پاسخ:

می‌دانیم که اگر دو چند جمله‌ای روی بازهٔ ناتهی برابر باشند، با هم یکی هستند. فرض کنیم $M > 0$ عدد حقیقی دلخواهی باشد. بازهٔ $K = [-M, M]$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in K$ مجموعهٔ بازی مانند $U_x$ موجود است که تحدید $f$ روی $U_x$ چندجمله‌ای است. چون $K$ فشرده است پس $x_1$، $x_2$، …، $x_n$ ی موجودند که $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. حال فرض کنیم تحدید $f$ به $U_{x_i}$ برابر $P_i$ باشد و $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. در این صورت با توجه به این که $U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \neq \emptyset$ نتیجه می‌گیریم که $P_i = P_{i+1}$. بنابراین $f$ روی $K$ چندجمله‌ای است و چون $M$ دلخواه بود پس $f$ روی کل $\mathbb{R}$ چنین است.

**۳)** آهن فروشی تیرآهن‌های به طول ۱۰ متر دارد. برای سه عدد حقیقی $0 < x_1, x_2, x_3 \leq 10$ می‌خواهیم با برش این تیرآهن‌ها ۳ قطعه آهن به طول‌های $x_1$، $x_2$ و $x_3$ تهیه کنیم. توجه کنید جوش دادن قطعه‌های تیرآهن امکان‌پذیر نیست. فرض کنید $f(x_1, x_2, x_3)$ حداقل تعداد تیرآهن‌های مورد نیاز باشد. مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابع $f$ را مشخص کنید.

**پاسخ:**

فرض کنید $A$ مجموعه بردارهایی باشد که جمع مؤلفه‌های آن‌ها برابر ۱۰ و $B$ مجموعه بردارهایی باشد که جمع دو مؤلفه کوچک‌تر آن‌ها برابر ۱۰ باشد. نشان می‌دهیم $A \cup B$ مجموعه موردنظر است.

اگر $x = (x_1, x_2, x_3) \in A$ پس $f(x) = 1$. حال به ازای هر گوی شامل $x$ مثل $B$ نقطه‌ای مثل $y = (y_1, y_2, y_3) \in B$ وجود دارد که $y_1 + y_2 + y_3 > 10$ پس $f(x_1, x_2, x_3) \geq 2$ و این یعنی $x$ یک نقطه ناپیوستگی است.

اگر $x \in B$ بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $x_1 \leq x_2 \leq x_3$، $x_1 + x_2 = 10$. پس $f(x) = 2$. حال هر گوی شامل $x$ شامل نقطه‌ای است مثل $y = (x_1 + \epsilon, x_2 + \epsilon, x_3 + \epsilon)$ که $\epsilon > 0$ اما $f(y) = 3$ زیرا جمع هر دو مؤلفهٔ $y$ از ۱۰ بیشتر است. پس $x$ نقطه ناپیوستگی است.

برای تکمیل حل مسأله کافیست ثابت کنیم $f$ در هر نقطه خارج از $A$ و $B$ پیوسته است. اگر $x = (x_1, x_2, x_3) \notin A \cup B$ باز بدون از دست رفتن کلیت می‌توان فرض کرد $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. برای $x$ سه حالت وجود دارد.

۱) $f(x) = 1$. پس $x_1 + x_2 + x_3 < 10$ و به وضوح $f$ در $x$ پیوسته است.

۲) $f(x) = 2$. پس $x_1 + x_2 < 10$ و $x_3 > 10 - (x_1 + x_2)$. در این حالت یک همسایگی شامل $x$ وجود دارد که برای هر $y = (y_1, y_2, y_3)$ در این همسایگی $y_1 + y_2 < 10$ و $y_3 > 10 - (y_1 + y_2)$ پس $f(y) = 2$ و $f$ در $x$ پیوسته است.

۳) $f(x) = 3$. پس جمع هر دو مؤلفه $x$ از ۱۰ بیشتر است. بنابراین می‌توان یک همسایگی حول $x$ انتخاب کرد که برای هر $y$ در آن همسایگی جمع هر دو مؤلفه $y$ نیز بیشتر از ۱۰ باشد. پس $f(y) = 3$ و حکم ثابت می‌شود.

آزمـــون نـــوبت اول
ســی و ششمین مســـابقهٔ
ریاضی دانشـــجویی کشور
جلسهٔ اول ۹۱/۲/۲۶
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

انجمن ریاضی ایران

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

۴) فرض کنید $R$ حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار باشد. ثابت کنید برای هر $x \in R$ حداکثر یک عضو خودتوان $e \in R$ وجود دارد که $e + x$ معکوس‌پذیر و $ex$ پوچ‌توان باشد.

## پاسخ:

به روش برهان خلف فرض کنید برای یک $x$ حداقل دو عضو خودتوان $e_1$ و $e_2$ موجود باشند که در شرایط مسأله صدق کنند. عدد $m$ را چنان می‌گیریم که $(xe_1)^m = 0 = (xe_2)^m$. بنابراین داریم $x^m = x^m(1 - e_1)$ و در نتیجه $Rx^m \subseteq R(1 - e_1)$ $(*)$. از طرف دیگر عضوی معکوس‌پذیر مانند $u_1$ وجود دارد به طوری که $u_1 = x + e_1$، پس $u_1(1 - e_1) = x(1 - e_1)$ و اگر طرفین رابطه قبل را به توان $m$ برسانیم به دست می آید

$$1 - e_1 = u_1^{-m}x^m \in Rx^m$$

بنابراین $R(1 - e_1) \subseteq Rx^m$ که با توجه به $(*)$ نتیجه می‌شود

$$Rx^m = R(1 - e_1)$$

استدلال مشابه نشان خواهد داد $Rx^m = R(1 - e_2)$. و در نتیجه داریم $R(1 - e_1) = R(1 - e_2)$. پس اعضای $r$ و $s$ وجود دارند به طوری که $(1 - e_1) = r(1 - e_2)$ و $(1 - e_2) = s(1 - e_1)$، بنابراین

$$\begin{aligned} 1 - e_1 &= r(1 - e_2) = r(1 - e_2)(1 - e_2) \\ &= (1 - e_1)(1 - e_2) = (1 - e_1)(s(1 - e_1)\ ) \\ &= s(1 - e_1) = 1 - e_2. \end{aligned}$$

و نهایتاً نتیجه می‌گیریم $e_1 = e_2$.

**۵)** می‌دانیم $\mathbb{R}(x)$ (میدان توابع گویا با ضرایب حقیقی) با رابطهٔ زیر به یک میدان مرتب تبدیل می‌شود: فرض کنیم $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_۰}{b_m x^m + \cdots + b_۰}$، در این صورت تعریف می‌کنیم $\frac{P}{Q} \lhd ۰$ اگر و تنها اگر $\frac{a_n}{b_m} < ۰$. می‌گوییم دنبالهٔ $\{f_n\}$ به $f$ ‏$\lhd$ـ همگرا است اگر برای هر $g \in \mathbb{R}(x)$ که $g \lhd ۰$، وجود داشته باشد $N > ۰$ که اگر $n > N$، آنگاه $g \lhd (f_n - f) \lhd -g$. هم‌چنین می‌گوییم دنبالهٔ $\{f_n\}$ ‏$\lhd$ـ کوشی است اگر برای هر $g \in \mathbb{R}(x)$ که $g \lhd ۰$ وجود داشته باشد $N > ۰$ که اگر $n, m > N$، آنگاه $g \lhd (f_n - f_m) \lhd -g$.

الف. دنباله‌ای با جملات متمایز مثال بزنید که $\lhd$ـ همگرا باشد.

ب. نشان دهید دنباله‌ای وجود دارد که $\lhd$ـ کوشی است ولی $\lhd$ـ همگرا نیست.

## پاسخ:

**الف.** نشان می‌دهیم دنبالهٔ $f_n(x) = \frac{۱}{x^n}$ به تابع صفر $\lhd$ـ همگرا است. فرض کنید $g = \frac{P}{Q} \lhd ۰$ داده شده است و ضریب‌های پیش‌روی $P$ و $Q$ هر دو مثبت باشد. اگر $N$ را برابر درجهٔ $Q$ بگیریم آن‌گاه اگر $n > N$

$$g(x) - f_n(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{۱}{x^n} = \frac{x^n P(x) - Q(x)}{x^n Q(x)} \rhd ۰.$$

زیرا ضریب پیش‌روی صورت همان ضریب پیش‌روی $P$ و ضریب پیش‌روی مخرج همان ضریب پیش‌روی $Q$ است. پس $g \lhd f_n$ و به علاوه به وضوح $f_n \lhd ۰ \lhd -g$ و لذا دنبالهٔ $\{f_n\}$ به تابع ثابت صفر $\lhd$ـ همگرا است.

**ب.** دنبالهٔ $\{h_n\}$ را به شکل $h_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{x^{۲^k}}$ را تعریف می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم این دنباله $\lhd$ـ کوشی است. فرض کنید $g = \frac{P}{Q} \lhd ۰$ مانند قسمت قبل داده شده باشد، عدد $N > ۰$ را به نحوی انتخاب کنید که $۲^N$ بزرگ‌تر از درجهٔ $Q$ باشد. اگر $n > m > N$ آن‌گاه

$$h_n(x) - h_m(x) = \sum_{k=m+۱}^{n} \frac{۱}{x^{۲^k}} \lhd n \times \frac{۱}{n} \times \frac{P(x)}{Q(x)} = g(x)$$

زیرا تعداد جملات سیکما کم‌تر از $n$ است و برای هر $k > m$، تابع گویای $\frac{۱}{x^{۲^k}}$ کم‌تر از $\frac{۱}{n}\frac{P(x)}{Q(x)}$ است. (استدلال مشابه قسمت الف است.) اکنون نشان می‌دهیم که $\{h_n\}$ در $\mathbb{R}(x)$ ، $\lhd$ـ همگرا نیست. فرض کنید به تابع $h$ ‏$\lhd$ـ همگرا باشد. در این صورت به‌سادگی می‌توان دید که $\{h_n(x^۲)\}$ به $h(x^۲)$ همگرا است. به علاوه داریم

$$h_n(x^۲) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{x^{۲^{k+۱}}} = h_{n+۱}(x) - \frac{۱}{x}.$$

اگر در دو طرف، $n$ را به بی‌نهایت میل دهیم خواهیم داشت

$$h(x^{۲}) = h(x) - \frac{۱}{x}.$$

نشان می‌دهیم این معادلهٔ تابعی جوابی در $\mathbb{R}(x)$ ندارد. فرض کنید $h(x) = \frac{R(x)}{S(x)}$ نمایش ساده‌شدهٔ یک جواب معادله باشد. با ضرب کردن مخرج‌ها خواهیم داشت

$$xR(x^{۲})S(x) = xR(x)S(x^{۲}) - S(x)S(x^{۲}).$$

واضح است که $S(x)S(x^{۲})$ باید عامل $x$ داشته باشد. فرض کنید $k \geq ۱$ بزرگ‌ترین عددی باشد که $S(x)$ به $x^k$ بخش‌پذیر باشد. در این صورت $S(x) = x^k T(x)$ و $T$ و $R$ عامل $x$ ندارند. داریم

$$xR(x^{۲})x^k T(x) = xR(x)x^{۲k}T(x^{۲}) - x^k T(x)x^{۲k}T(x^{۲})$$

پس

$$R(x^{۲})T(x) = x^k(R(x) - x^{k-۱}T(x))T(x^{۲})$$

و لذا $R(x^{۲})T(x)$ باید عامل $x$ داشته باشد و این تناقض است زیرا $T$ و $R$ عامل $x$ ندارند.

۶) $P$ متوازی‌السطوحی است که مختصات همهٔ رأس‌های آن صحیح است؛ فرض کنید $A$، $B$، $C$ و $D$ به ترتیب تعداد نقاط با مختصات صحیح اکیداً داخل $P$، روی وجوه ولی نه روی اضلاع $P$، روی اضلاع ولی نه روی رأس‌های $P$ و روی رأس‌های $P$ باشند. نشان دهید

$$\text{حجم}\,P = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}D.$$

پاسخ:

روشن است که اگر $P$ را با یک انتقال صحیح به یک متوازی‌السطوح دیگر تبدیل کنیم. کمیت‌های $A$، $B$، $C$ و $D$ و هم‌چنین حجم $P$ تغییر نمی‌کنند. واضح است که می‌توان با انتقال‌های صحیح $P$ کل فضا را پوشاند طوری که اشتراک هر دو شکل در یک وجه، یال، رأس و یا تهی باشد.

$S$ را مکعب $[-R,R]^3$ بگیرید. فرض کنید $N$ تعداد نقاط صحیح داخل $S$ و $N'$ تعداد متوازی‌السطوح‌های مذکور باشد که کاملاً داخل $S$ هستند.

**لم:**

الف) $\lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{vol(S)}}{\mathrm{N}} = 1$ ( منظور از $\mathrm{vol(X)}$، حجم $X$ است.)

ب) $\lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{vol(S)}}{\mathrm{N'}} = \mathrm{vol(p)}$

ج) $\lim_{R\to\infty} \frac{N}{N'} = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}D$

کافی است این لم را ثابت کنیم؛ زیرا در این صورت با تقسیم (الف) بر (ب) و سپس ضرب در (ج) حکم نتیجه می‌شود.

قسمت (الف) واضح است. اجتماع متوازی‌السطوح‌هایی که داخل $S$ هستند را $W$ بنامید. حجم $W$ برابر است با $N'.\mathrm{vol(P)}$. بنابراین (۱) $\mathrm{vol(S)} \geq \mathrm{N'.vol(P)}$. از طرف دیگر، $d$ را بیشترین فاصلهٔ رئوس $P$ در نظر بگیرید و قرار دهید $\bar{S} = [-R+d, R-d]^3$. ادعا می‌کنیم $\bar{S} \subseteq W$. فرض کنید $x \in \bar{S}$. $Q$ را یک متوازی‌السطوح در نظر بگیرید که $x \in Q$. چون بیشترین فاصلهٔ رئوس $Q$ برابر با $d$ است و $x \in \bar{S} \cap Q$، نتیجه می‌گیریم $Q \subseteq S$. پس $Q \subseteq W$ و در نتیجه $x \in W$. حال ثابت کردیم $\bar{S} \subseteq W$ بنابراین:

$$N'\mathrm{vol(P)} \geq \mathrm{vol(\bar{S})} = (\frac{\mathrm{R-d}}{\mathrm{R}})^3 \mathrm{vol(S)} \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\mathrm{vol(P)} \leq \frac{\mathrm{vol(S)}}{\mathrm{N'}} \leq (\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R-d}})^3\mathrm{vol(P)}$ و با میل دادن $R$ به $+\infty$ قسمت ب ثابت می‌شود.

اثبات قسمت (ج): هر نقطهٔ صحیح، درون یک وجه، درون یک یال و یا منطبق بر یک رأس یکی از متوازی‌السطوح‌های مذکور است. بسته به این وضعیت عدد ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ و یا $\frac{۱}{۸}$ را به آن نقطه نسبت دهید. حال برای هر متوازی‌السطوح $Q$ داخل $S$ ، اعداد متناظر با نقاط صحیح داخل $Q$ را جمع بزنید و حاصل آن را در نظر بگیرید. سپس اعداد متناظر با همهٔ متوازی‌السطوح‌های داخل $S$ را با هم جمع بزنید. از طرفی، عدد متناظر با هر متوازی‌السطوح برابر است با $A + \frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۴}C + \frac{۱}{۸}D$. پس حاصل جمع نهایی برابر است با $N'(A + \frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۴}C + \frac{۱}{۸}D)$ . از طرف دیگر برای هر نقطهٔ صحیح داخل $S$، اگر عدد متناظر با آن برابر با $۲^{-i}$ باشد، آن‌گاه آن نقطه در دقیقاً $۲^i$ متوازی‌السطوح قرار دارد (این موضوع با حالت‌گیری روی $i$ دیده می‌شود) که بعضی از آن‌ها ممکن است کاملاً داخل $S$ نباشند. پس حاصل جمع نهایی حداکثر برابر با $N$ است. در نتیجه

$$N \geq N'(A + \frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۴}C + \frac{۱}{۸}D) \qquad (۳)$$

به شیوهٔ دیگر، برای هر متوازی‌السطوح $Q$ داخل $S$ ، تنها اعداد متناظر با نقاط صحیح داخل $Q \cap \bar{S}$ را جمع بزنید و سپس حاصل جمع همهٔ متوازی‌السطوح‌ها را هم با هم جمع بزنید. از طرفی عدد متناظر با هر متوازی‌السطوح حداکثر برابر با $A + \frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۴}C + \frac{۱}{۸}D$ است. پس حاصل جمع نهایی حداکثر برابر است با $N(A + \frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۴}C + \frac{۱}{۸}D)$ . از طرف دیگر هر نقطهٔ صحیح داخل $\bar{S}$ که عدد متناظر با آن $۲^{-i}$ است، دقیقاً در $۲^i$ متوازی‌السطوح قرار دارد که همهٔ آنها کاملاً داخل $S$اند. پس حاصل جمع نهایی حداقل برابر با $N''$ است که $N''$ تعداد نقاط صحیح داخل $\bar{S}$ است. پس:

$$N'' \leq N'(A + \frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۴}C + \frac{۱}{۸}D) \qquad (۴)$$

حال قسمت (ج) از روابط ۳ و ۴ و این که $\lim_{R\to\infty} \frac{N''}{N} = ۱$ نتیجه می‌شود. پس لم ثابت شد و همان‌طور که توضیح داده شد مسأله ثابت می‌شود.