پاسخ سوالات جلسه اول ۸۳/۲/۲۲

پاسخ سوال ۱) فرض کنید $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. اگر تعداد متناهی جملات سری ناصفر باشد، یعنی f یک چند جمله‌ای باشد، آنگاه چون یک‌به‌یک است، بنا به قضیه اساسی جبر $f(z)=c_0+c_1 z$. در غیر اینصورت $f(\frac{1}{z})$ در صفر دارای نقطه تکین اساسی است. بنابراین در هر همسایگی صفر تابع $f(\frac{1}{z})$ یک‌به‌یک نیست و لذا f نیز یک‌به‌یک نمی‌باشد، که با فرض در تناقض است. □

۱۰ نمره

۱۰ نمره

پاسخ سوال ۲) چون f پوشاست، $f^{-1}\{(0,0)\}$ حداقل یک عضو دارد. اگر حکم برقرار نباشد، دو حالت داریم:

الف) $f^{-1}\{(0,0)\}=\{\alpha_1\}$. در اینحالت $f:(\mathbb{R}',d_1)\to(A_1,d)$ پیوسته و پوشا می‌باشد که در آن $A_1=A-\{(0,0)\}$ و $\mathbb{R}'=\mathbb{R}-\{\alpha_1\}$. چون

$$A_1=\{(x,0)|x>0\}\cup\{(x,0)|x<0\}\cup\{(0,y)|y>0\}\cup\{(0,y)|y<0\}$$ ۱۰ نمره

اتحاد چهار مجموعه باز از هم جداست، $\mathbb{R}'$ باید اتحاد چهار مجموعهٔ باز از هم جدا باشد که این تناقض است.

ب) اگر $f^{-1}\{(0,0)\}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$. در اینحالت $f:(\mathbb{R}'',d_1)\to(A_1,d)$ پیوسته و پوشا می‌باشد که در آن A_1 مانند قسمت قبل می‌باشد و $\mathbb{R}''=\mathbb{R}-\{\alpha_1,\alpha_2\}$. چون مانند قسمت قبل A_1 اتحاد چهار مجموعهٔ باز از هم جداست، $\mathbb{R}''$ باید اتحاد چهار مجموعهٔ باز از هم جدا باشد که تناقض است. بنابراین $f^{-1}\{(0,0)\}$ حداقل سه عضو دارد. □ ۱۰ نمره

پاسخ سوال ۳) با توجه به فرض و با استفاده از فرمول عکس موبیوس، برای هر عدد طبیعی n می‌توانیم بنویسیم

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)(\frac{n}{d})^2=n^2\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2}=n^2 g(n),$$ ۱۳

که در آن $g(n)=\sum\limits_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2}$. چون $\frac{\mu(d)}{d^2}$ تابعی ضربی از d می‌باشد لذا g نیز تابعی ضربی از n خواهد بود. چون برای عدد اول p و عدد صحیح و نامنفی α، ۱۶

$$g(p^\alpha)=\sum_{d|p^\alpha}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(p)}{p^2}=1-\frac{1}{p^2},$$ ۲۰

لذا برای هر $n>1$،

$$\begin{aligned} g(n) &= g\left(\prod_{p|n\ \text{اول}} p^{\alpha_p}\right)=\prod_{p|n\ \text{اول}} g(p^{\alpha_p})=\prod_{p|n\ \text{اول}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\prod_{p|n\ \text{اول}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p|n\ \text{اول}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\\ &=\frac{\phi(n)}{n}\prod_{p|n\ \text{اول}}\left(1+\frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $n > ۱$،

$$\frac{f(n)}{\phi(n)} = \frac{n^۲ g(n)}{\phi(n)} = \frac{n^۲}{\phi(n)}\ \frac{\phi(n)}{n} \prod_{p|n\ \text{اول}} \left(۱ + \frac{۱}{p}\right) = n \prod_{p|n\ \text{اول}} \left(۱ + \frac{۱}{p}\right). \ \square$$

پاسخ سوال ۴) $۱ \le k \le n$ را دلخواه (ولی ثابت) در نظر بگیرید و قرار دهید $\tau \in G_k \cap Z(G)$. حال فرض کنید $۱ \le i \le n$ دلخواه باشد. بنابر فرض $\sigma \in G$ موجود است که $\sigma(k) = i$. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\lambda \in G_i &\iff \lambda(i) = i \\
&\iff \lambda(\sigma(k)) = \sigma(k) \\
&\iff \sigma^{-۱}\lambda\sigma(k) = k \\
&\iff \sigma^{-۱}\lambda\sigma \in G_k \\
&\iff \lambda \in \sigma G_k \sigma^{-۱}
\end{aligned}$$

پس $G_i = \sigma G_k \sigma^{-۱}$. چون $\tau \in G_k$، پس $\sigma\tau\sigma^{-۱} \in \sigma G_k \sigma^{-۱} = G_i$ و چون $\tau \in Z(G)$، لذا $\tau \in G_i$. اما i دلخواه فرض شده بود، پس $\tau \in \bigcap_{i=۱}^{n} G_i = \{e\}$. در نتیجه $G_k \cap Z(G) = \{e\}$. $\square$

پاسخ سوال ۵) فرض کنید $v_۱, v_۲, \ldots, v_t \in A$ و دو به دو تعداد زوج درایهٔ مشترک یک دارند. حال ادعا می‌کنیم v_iها $(۱ \le i \le t)$ روی میدان $\mathbb{Z}_۲$ مستقل خطی هستند زیرا:

$$c_۱ v_۱ + \cdots + c_t v_t = ۰ \overset{\forall i}{\Longrightarrow} v_i.(c_۱ v_۱ + \cdots + c_t v_t) = ۰ \pmod{\mathbb{Z}_۲}$$

اما واضح است که

$$v_i.v_j = \begin{cases} ۰ & i \neq j \\ ۱ & i = j \end{cases} \pmod{\mathbb{Z}_۲}$$

لذا

$$v_i.(c_۱ v_۱ + \cdots + c_t v_t) = ۰ \Longrightarrow c_i = ۰$$

بنابراین v_iها مستقل خطی هستند. پس $t \le n$. از طرفی اگر v_i را برداری در نظر بگیریم که درایهٔ iام آن یک و بقیه درایه‌ها صفر باشد $(۱ \le i \le n)$. آنگاه واضح است که $v_i \in A$ و v_iها دو به دو تعداد زوج درایه مشترک یک دارند. $\square$

پاسخ سوال ٦) یک جایگشت از عضوهای P به صورت تصادفی در نظر بگیرید و قرار دهید:

F_i پیشامد این باشد که i قبل از عناصر $P \backslash U_i$ در جایگشت ظاهر شود.

E_i پیشامد این باشد که F_i به وقوع پیوندد و برای هر $j \in L_i$، F_j رخ ندهد.

به عبارت دیگر E_i پیشامد این است که i کوچکترین عضو P است که F_i رخ می‌دهد. زیرا اگر i و j دو عضو غیرقابل مقایسه باشند آنگاه F_i و F_j هر دو نمی‌توانند با هم به وقوع پیوندند. اگر i و j قابل مقایسه باشند آنگاه دو پیشامد E_i و E_j نیز نمی‌توانند با هم رخ دهند (لذا پیشامدهای E_iها

مجزا هستند). حال با استقراء ثابت می‌کنیم $X_i = P_r(E_i)$. اگر i عضو مینیمال P باشد حکم واضح است. فرض کنید برای $j \in L_i$ داریم $X_j = P_r(E_j)$ و ثابت می‌کنیم $X_i = P_r(E_i)$. از آنجایی که E_jها مجزا هستند داریم احتمال اینکه F_jها برای $j \in L_i$ رخ ندهند برابر است با $۱ - \sum_{j \in L_i} X_j$. اگر ثابت کنیم پیشامد F_i مستقل است از پیشامد «تمام F_jها رخ ندهند» $(j \in L_i)$، آنگاه به‌راحتی می‌توانیم حکم را نتیجه بگیریم. با توجه به اینکه مکان i در جایگشت تاثیری در F_jها $(j \in L_i)$ ندارد لذا واضح است که آنها مستقل هستند بنابراین:

$$P_r(E_i) = P_r(F_i \cap \bigcap_{j \in L_i} \overline{F_j}) = P_r(F_i) P_r(\bigcap_{j \in L_i} \overline{F_j}) = \frac{۱ - \sum_{j \in L_i} X_j}{n - |U_i|}$$

پس برای هر $i \in P$، $X_i = P_r(E_i)$ لذا $۰ \leq X_i \leq ۱$. $\square$