

(۱) گروه  $G$  و تابع  $f : G \rightarrow G$  مفروض هستند به طوری که برای هر  $x, y \in G$  داریم  $f(xf(y)) = f(x)y$ . ثابت کنید  $f$  یک خودریختی (همریختی یک به یک و پوشا) است.

پاسخ:

با قراردادن  $x = y = e$  در فرض مسئله به دست می آوریم  $f(e) = f(f(e))$  بنابراین

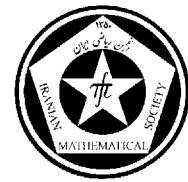
$$f(f(e)) = f(f(f(e)))$$

$$f(e) = f(f(f(e))) = f(ef(f(e))) = f(e)f(e) \quad \text{در نتیجه}$$

پس  $f(e) = e$ . حال با قراردادن  $x = e$  در فرض مسئله رابطه  $f(f(y)) = y$  به دست می آید که خود بیانگر دوسویی بودن  $f$  است. به علاوه برای هر  $x, y \in G$  داریم:

$$f(xy) = f(xf(f(y))) = f(x)f(y)$$

پس  $f$  همریختی است.



(۲) فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک باشد که در آن هر زیرمجموعه‌ی چگال باز است. ثابت کنید مجموعه‌ی نقاط تنها در  $X$  چگال است.

پاسخ:

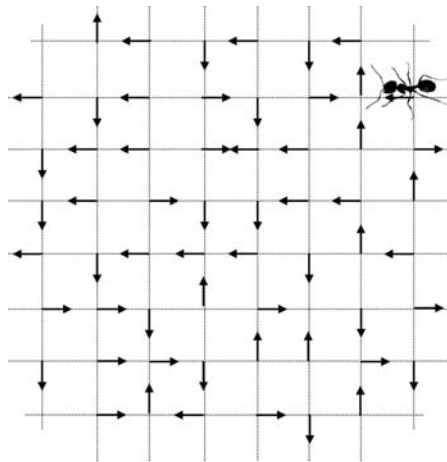
فرض کنید  $S$  مجموعه‌ی نقاط تنهای  $X$  باشد. اگر  $S$  در  $X$  چگال نباشد، وجود دارد  $a \in X$  و یک همسایگی از آن مثل  $B$  که  $B \cap S = \emptyset$ . دنباله‌ای مانند  $\{x_n\}$  چنان انتخاب کنید که اولاً همه‌ی اعضای آن در  $B$  باشد، ثانیاً همه‌ی نقاط آن مخالف  $a$  باشند و ثالثاً  $x_n \rightarrow a$ . با توجه به این که  $a$  نقطه‌ی تنها نیست این کار ممکن است.

ادعا می‌کنیم  $A = X \setminus \{x_k | k \in \mathbb{N}\}$  یک زیرمجموعه‌ی چگال  $X$  است. کافی است نشان دهیم برای هر  $x_k, k \in \mathbb{N}$  یک نقطه‌ی حدی  $A$  است.

پس می‌توان با دنباله‌ای از نقاط  $X$  مثل  $\{y_n\}$  به  $x_k$  میل کرد. با توجه به این که  $x_n \rightarrow a$  و  $x_k \neq a$ ، می‌توان دنباله‌ی  $\{y_n\}$  را طوری انتخاب کرد که نقاطش غیر از نقاط دنباله‌ی  $\{x_n\}$  باشد. در نتیجه دنباله‌ی  $\{y_n\}$  کاملاً در  $A$  است و لذا  $x_k \in \bar{A}$ .

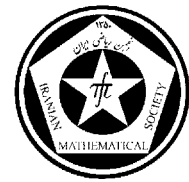
پس ثابت کردیم که  $A$  چگال است و لذا طبق فرض مسأله  $A$  باز است. این تناقض است زیرا  $A^c$  مجموعه‌ی نقاط دنباله‌ی  $\{x_n\}$  است که حد آن، یعنی  $a$ ، در  $A^c$  نیست و در نتیجه  $A^c$  بسته نیست. این تناقض با باز بودن  $A$  است.

(۳) به هر کدام از نقاط شبکه‌ی اعداد با مختصات صحیح در صفحه، یکی از پیکان‌های  $\rightarrow$ ،  $\uparrow$ ،  $\leftarrow$  و  $\downarrow$  نسبت داده شده است. مورچه‌ای در نقطه‌ی دلخواهی از این شبکه قرار دارد و لانه‌اش در نقطه‌ی دیگری از شبکه است. در هر مرحله مورچه در جهت پیکان مربوط به نقطه‌ای که در آن قرار گرفته، به نقطه‌ی مجاور حرکت می‌کند و سپس پیکان نقطه‌ای که ترک کرده،  $90^\circ$  در جهت ساعت‌گرد تغییر می‌کند. نشان دهید اگر مورچه هرگز به لانه‌اش نرسد فاصله‌اش تا لانه به بی‌نهایت میل می‌کند.



پاسخ:

فرض کنید فاصله‌ی مورچه تا لانه به بی‌نهایت میل نکند. این بدان معنی است که مجموعه‌ی کران‌دار  $A$  از شبکه وجود دارد که مورچه نامتناهی مرتبه به آن باز می‌گردد. تعداد نقاط  $A$  متناهی است، بنابراین نقطه‌ای مثل  $a$  وجود دارد که مورچه بی‌نهایت بار از آن گذر می‌کند. چون جهت پیکان خارج شده از  $a$  در هر بار گذر  $90^\circ$  در جهت ساعت‌گرد تغییر می‌کند بنابراین مورچه از همه‌ی نقاط مجاور  $a$  نیز بی‌نهایت بار گذر می‌کند و با تکرار این استدلال مورچه از تمام نقاط شبکه بی‌نهایت مرتبه گذر می‌کند پس به لانه‌اش هم می‌رسد!



(۴) فرض کنید  $n$  عددی طبیعی باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ی ناشمارایی از  $\mathbb{R}^n$  وجود دارد که هر  $n$  عضو متمایز آن مستقل خطی است. ( $\mathbb{R}^n$  را به عنوان فضای برداری روی  $\mathbb{R}$  در نظر بگیرید.)

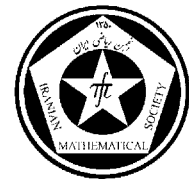
پاسخ:

(راه حل اول): قرار دهید  $A_0 = \{(1, x, \dots, x^{n-1}) \mid x \in \mathbb{R}\}$  در این صورت  $A_0$  جواب مسأله است. برای این منظور کافی است توجه کنیم که اگر  $V_1 = (1, x_1, \dots, x_1^{n-1})$ ,  $V_2 = (1, x_2, \dots, x_2^{n-1})$ ,  $V_n = (1, x_n, \dots, x_n^{n-1})$   $n$  عضو متمایز  $A_0$  باشند آنگاه این  $n$  عضو مستقل خطی هستند چرا که ماتریسی که سطرهای آن به ترتیب  $V_1, V_2, \dots, V_n$  است دارای دترمینان  $\prod_{j < i} (x_i - x_j)$  می باشد که عددی غیر صفر است بنابراین سطرهای این ماتریس مستقل خطی هستند.

(راه حل دوم): قرار دهیم  $\{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ عضو } n \text{ عضو } A \text{ مستقل خطی است}\} = X$  در این صورت  $X$  غیرتهی است و در شرایط لم زرن صدق می کند.  $A_0$  را عضو ماکسیمالی از  $X$  می گیریم. ادعا می کنیم  $A_0$  ناشمارا است که در این صورت  $A_0$  جواب مسأله است.

در غیر این صورت فرض کنید  $A_0$  شمارش پذیر باشد. اگر  $v \notin A_0$  آنگاه چون  $\{v\} \cup A_0 \subseteq X$ ،  $v$  ترکیبی خطی از  $n-1$  عضو  $A_0$  است.

بنابراین هر بردار در  $\mathbb{R}^n$  ترکیب خطی  $n-1$  عضو  $A_0$  است و چون تعداد زیرمجموعه‌های  $n-1$  عضو  $A_0$  هم شمارش پذیر است پس  $\mathbb{R}^n$  برابر با اجتماع تعدادی شمارا ابرصفحه است که ممکن نیست [توجه کنید که صفحه اجتماع تعدادی شمارا خط نیست. هم چنین فضا اجتماع تعدادی شمارا صفحه نیست و ...]



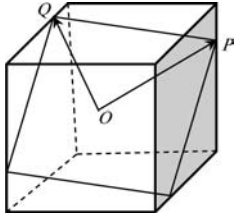
(۵) فرض کنید  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  دارای این خاصیت باشد که تصویر هر زیرمجموعه‌ی همبند  $\mathbb{R}^2$  تحت  $f$  همبند و تصویر هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی  $\mathbb{R}^2$  تحت  $f$  فشرده باشد. ثابت کنید  $f$  پیوسته است.

پاسخ:

فرض کنید  $f$  در نقطه‌ای مثل  $x^* \in \mathbb{R}^2$  پیوسته نباشد. در این صورت  $\varepsilon > 0$  و دنباله‌ای مثل  $\{x_n\}$  وجود دارد که  $x_n \rightarrow x^*$  و  $|f(x_n) - f(x^*)| \geq \varepsilon$  برای هر  $n \geq 1$  پاره خطی که دو سر آن  $x_n$  و  $x^*$  است را در نظر بگیرید. این پاره خط یک مجموعه‌ی همبند است و لذا تصویر آن تحت  $f$  که شامل دو نقطه‌ی  $f(x_n)$  و  $f(x^*)$  است نیز همبند است. توجه کنید که  $|f(x_n) - f(x^*)| \geq \varepsilon$  پس  $y_n$  ای روی پاره خط مذکور وجود دارد که  $|f(y_n) - f(x^*)| = \frac{k}{k+1}\varepsilon$

اکنون به وضوح دنباله‌ی  $\{y_k\}$  به  $x^*$  میل می‌کند پس مجموعه‌ی  $\{x^*\} \cup \{y_k | k \in \mathbb{N}\}$  فشرده است و لذا تصویر آن هم باید فشرده باشد. این ممکن نیست زیرا  $|f(x^*) - f(y_k)| \rightarrow \varepsilon$  و  $\{y_k\}$  زیردنباله‌ای هم‌گرا دارد که نمی‌تواند به هیچ کدام از نقاط  $f(x^*)$  و  $f(y_k)$  میل کند پس  $f(\{x^*\} \cup \{y_k | k \in \mathbb{N}\})$  بسته نیست و لذا فشرده نیست.

(۶) نشان دهید مساحت بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان در مکعب واحد قرار داد برابر  $\frac{9}{8}$  است.



پاسخ:

یک روش برای قراردادن مربعی به مساحت  $\frac{9}{8}$  درون مکعب در شکل نشان داده شده است که رؤوس مربع اضلاع مکعب را به نسبت ۱ : ۳ تقسیم می‌کنند.

پیش از ادامه برای سادگی در برخی محاسبات با یک تغییر مقیاس مکعب را به شکل  $[-1, 1]^3$  و با طول ضلع ۲ فرض می‌کنیم. اکنون مسأله را در چند گام حل می‌کنیم: گام اول.

ادعا می‌کنیم که می‌توان مرکز مربع ماکسیمال را منطبق بر مرکز مکعب و برابر با  $O$ ، مبدأ مختصات گرفت زیرا اگر مربع را با  $S$  و بردار متصل کننده مرکز مربع به  $O$  را با  $\vec{T}$  نشان دهیم. به دلیل تقارن مکعب  $S$  نیز درون مکعب قرار می‌گیرد ولی  $-S = S + 2\vec{T}$ . یعنی  $S$  و  $S + 2\vec{T}$  درون مکعب واقع شده‌اند پس  $S + 2\vec{T}$  نیز درون مکعب است که مربعی با ویژگی مطلوب ماست.

گام دوم.

$P, Q$  را برابر با دو رأس مجاور از مربع مورد نظر بگیرید. از شرایط مسأله روشن است که  $P, Q$  دو نقطه از مکعب  $[-1, 1]^3$  هستند که  $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$  و  $\vec{P} \perp \vec{Q}$  و بالعکس اگر  $P, Q$  این ویژگی‌ها را داشته باشند  $P, Q, -P, -Q$  رؤوس مربعی درون مکعب را تشکیل می‌دهند. پس هدف یافتن چنین  $P, Q$  ای است که  $|\vec{P}|$  ماکزیمم شود. اگر مختصات  $P$  و  $Q$  را به ترتیب  $(x, y, z)$  و  $(u, v, w)$  بنامیم شرایط فوق عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2 \\ xu + yv + zw = 0 \\ x, y, z, u, v, w \in [-1, 1] \end{cases} \quad (*)$$

و هدف ماکزیمم کردن  $A = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$  برای همه‌ی جواب‌های  $(*)$  است. ادعا می‌کنیم این ماکسیمم برابر با  $\frac{9}{8}$  است که به عنوان مثال به ازای مقادیر  $(x, y, z, u, v, w) = (1, 1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{4}, 1)$  اتخاذ می‌شود.

گام سوم: نشان می‌دهیم که برای مربع ماکسیمال با شرایط دو گام قبلی، یکی از  $P$  یا  $Q$  روی ضلع مکعب و دیگری بر وجه مکعب واقع است: ابتدا فرض کنید هیچ کدام از  $P$  و  $Q$  بر ضلعی از مکعب قرار نداشته باشند در این صورت ابتدا با دوران کوچکی حول  $\vec{Q}$ ،  $P$  را به داخل مکعب و سپس با دوران کوچکی حول  $\vec{P}$ ،  $Q$  را به داخل مکعب منتقل می‌کنیم. اکنون می‌توان هر دوی  $\vec{Q}$  و  $\vec{P}$  را همزمان بزرگ‌تر کرد طوری که هم‌چنان داخل مکعب باقی بمانند و این با ماکسیمال بودن مربع در تناقض است. اکنون فرض کنید  $P$  بر روی ضلع مکعب باشد. اگر  $Q$  بر وجهی از مکعب نباشد یعنی اکیداً داخل مکعب است و می‌توان در صفحه گذرنده از  $\vec{P}$  و ضلعی که  $P$  بر آن واقع است با دوران کوچکی  $P$  را به داخل مکعب منتقل کرد طوری که  $Q$  هم‌چنان درون مکعب بماند و مجدداً با بزرگ کردن همزمان  $P$  و  $Q$  به تناقض می‌رسیم.

نتیجه‌ی این است که می‌توان با در نظر گرفتن  $-P$  به جای  $P$  و یا  $-Q$  به جای  $Q$  در صورت لزوم، در (\*) فرض کرد  $x = y = 1$  و نیز یکی از  $u, v, w$  نیز برابر با یک هستند.

این دو حالت را در گام بعد بررسی می‌کنیم.

گام چهارم:

حالت اول:  $x = y = w = 1$

$$\begin{cases} 1 + 1 + z^2 = u^2 + v^2 + 1 (= A) \\ u + v + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{معادله‌ی دوم} \Rightarrow z^2 = (u + v)^2 \Rightarrow 2 + 2uv = 1 \Rightarrow uv = \frac{-1}{2}$$

$$\text{معادله‌ی اول} \Rightarrow |u|, |v| \geq \frac{1}{2}, \quad A = |u|^2 + 1 + \frac{1}{4|u|^2}$$

که بیشترین مقدار خود را برای  $1 \leq |u|^2 \leq \frac{1}{2}$  در  $|u| = \frac{1}{2}$  می‌گیرد که  $\frac{9}{4}$  است.

حالت دوم:  $x = y = v = 1$  (حالت  $x = y = u = 1$  مشابه است).

$$\begin{cases} 1 + 1 + z^2 = 1 + u^2 + w^2 (= A) \\ u + 1 + zw = 0 \end{cases}$$

$$\text{معادله‌ی دوم} \Rightarrow |zw| = |u + 1| \Rightarrow z^2 \geq (zw)^2 \geq (u + 1)^2$$

$$\text{معادله‌ی اول} \Rightarrow 1 + u^2 + w^2 \geq 2 + (1 + u)^2 \Rightarrow w^2 \geq 2(1 + u)$$

$$|w|^2 \geq 2|1 + u| = 2|zw| \Rightarrow |z| \leq \frac{|w|}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A \leq 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$