

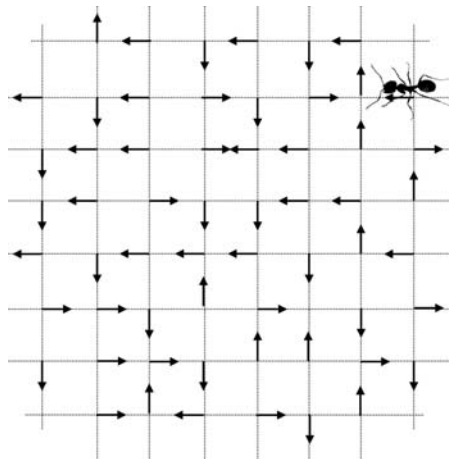


سوالات نوبت اول  
سی و چهارمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۸۹/۲/۱  
مدت امتحان : ۴ ساعت



انجمن ریاضی ایران

- (۱) گروه  $G$  و تابع  $f : G \rightarrow G$  مفروض هستند به طوری که برای هر  $x, y \in G$  داریم  $f(xf(y)) = f(x)y$ . ثابت کنید  $f$  یک خودریختی (همریختی یک به یک و پوشا) است.
- (۲) فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک باشد که در آن هر زیرمجموعه‌ی چگال باز است. ثابت کنید مجموعه‌ی نقاط تنها در  $X$  چگال است.
- (۳) به هر کدام از نقاط شبکه‌ی اعداد با مختصات صحیح در صفحه، یکی از پیکان‌های  $\rightarrow, \uparrow, \leftarrow$  و  $\downarrow$  نسبت داده شده است. مورچه‌ای در نقطه‌ی دلخواهی از این شبکه قرار دارد و لانه‌اش در نقطه‌ی دیگری از شبکه است. در هر مرحله مورچه در جهت پیکان مربوط به نقطه‌ای که در آن قرار گرفته، به نقطه‌ی مجاور حرکت می‌کند و سپس پیکان نقطه‌ای که ترک کرده،  $90^\circ$  در جهت ساعت‌گرد تغییر می‌کند. نشان دهید اگر مورچه هرگز به لانه‌اش نرسد فاصله‌اش تا لانه به بی‌نهایت میل می‌کند.



- (۴) فرض کنید  $n$  عددی طبیعی باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ی ناشمارایی از  $\mathbb{R}^n$  وجود دارد که هر  $n$  عضو متمایز آن مستقل خطی است. ( $\mathbb{R}^n$  را به عنوان فضای برداری روی  $\mathbb{R}$  در نظر بگیرید.)
- (۵) فرض کنید  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  دارای این خاصیت باشد که تصویر هر زیرمجموعه‌ی همبند  $\mathbb{R}^2$  تحت  $f$  همبند و تصویر هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی  $\mathbb{R}^2$  تحت  $f$  فشرده باشد. ثابت کنید  $f$  پیوسته است.
- (۶) نشان دهید مساحت بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان در مکعب واحد قرار داد برابر  $\frac{9}{8}$  است.